

PER UNA SALA DELLA MATEMATICA

(R. Manara, 2014)) Nella seconda metà degli anni '90 Carlo Felice Manara fu interpellato dal dott. Sergio Musazzi per collaborare a un progetto che lo interessò particolarmente.

A Viserba di Rimini, nel parco chiamato Italia in Miniatura, il proprietario Paolo Rambaldi, su progetto di Musazzi, aveva realizzato una innovativa Sala della Scienza, in cui vari exhibit illustrano, in modo comprensibile e attraente, interessanti fenomeni e leggi della fisica. Nacque l'idea di allargare l'area dedicata alla divulgazione scientifica con una Sala della Matematica, che potesse in modo analogo offrire visualizzazioni e spiegazioni di argomenti divulgabili di matematica. Luoghi del genere non esistevano ancora in Italia, mentre già iniziavano a vedersi in città estere: sarebbe stato dunque un tentativo anticipatore.

La proposta piacque a CFM, che la giudicò interessante come occasione per “dare della matematica una immagine diversa da quella che è diffusa abitualmente tra il pubblico”, in particolare mostrandone l'aspetto estetico e la lunga e interessante evoluzione storica. Nonostante nutrisse la convinzione che la matematica non possa subire volgarizzazioni per immagini e illustrazioni, si mise al lavoro sviluppando alcune idee relative alla matematica elementare e non solo.

Il progetto, purtroppo, non fu realizzato, ma quelle idee sono interessanti: alcune hanno visto una certa divulgazione in luoghi museali successivamente creati anche in Italia, () altre potrebbero ancora essere materia di elaborazione...*

Alla costruzione di una sala della matematica, peraltro, CFM aveva pensato anche in anni precedenti. Per una mostra temporanea presso la Biblioteca comunale di Baggio aveva proposto il titolo: “Geometria: ragione, simmetria, bellezza”. Per motivi burocratici la mostra non fu attuata, ma già erano stati fatti costruire modelli di solidi e di macchine, che si trovano ora presso la Scuola Tommaso Moro a Milano.



INDICE

1. PROGETTO DI UNA SALA DELLA MATEMATICA: IDEE DIRETTIVE pg. 2
2. PROGETTO DI MASSIMA pg. 4
3. SCHEDA1: Geodetiche e trasporto parallelo su una superficie pg. 5
4. SCHEDA2: Curve d'inseguimento e pseudosfera pg. 9
5. SCHEDA 3: Quadratura del cerchio pg. 14
6. SCHEDA 4: Volume della sfera. Scodella di Galileo pg. 16
7. SCHEDA5: Il procedimento di exhaustion pg. 18
8. SCHEDA 6: Dividere in parti uguali pg. 20
9. Teoria dell'Inversore di Peaucellier pg 24

PROGETTO DI UNA SALA DELLA MATEMATICA: IDEE DIRETTIVE.

1 - Il progetto di una SALA DELLA MATEMATICA è ispirato a varie finalità. La principale tra queste è dare della matematica un'immagine diversa da quella che è diffusa abitualmente tra il pubblico; infatti molti ricordano la matematica che fu loro insegnata a scuola come una materia spesso ostica e difficile, per molti astratta e misteriosa. Anche molti che hanno conoscenze estese di matematica superiore considerano questa materia come una dottrina di puro servizio, che fornisce formule e procedimenti molto potenti ed utili, ma che non ha alcuna importanza culturale.

Tutto ciò non è pienamente giustificato: infatti la scienza costituisce oggi una componente fondamentale della nostra cultura e della stessa vita civile; e si può dire senza timore di smentite che la scienza, modernamente intesa, non sussisterebbe senza la matematica.

Inoltre abitualmente la matematica viene presentata come una dottrina quasi cristallizzata e mummificata: si ignora quasi completamente il suo sviluppo storico. Invece l'evoluzione della matematica nei secoli si presenta come una avventura avvincente ed entusiasmante di ricerca della verità, della chiarezza e della certezza. Sarebbe quindi utile una iniziativa culturale che mettesse in rilievo l'importanza della matematica nello sviluppo secolare del pensiero scientifico, mostrando anche la sua evoluzione storica: dalla matematica dei Greci alle teorie relativamente moderne.

In questo ordine di idee si può parlare a buon diritto di "dimensione umanistica della matematica", perché questa scienza ha accompagnato ogni passo del progresso scientifico e della maturazione della nostra civiltà.

2 - È stato scritto che la matematica è forse l'unica scienza che non ammette volgarizzazioni; questa affermazione ha un grande contenuto di verità, e vale soprattutto per demolire le illusioni di chi pretenderebbe di facilitare ad ogni costo ogni procedimento di astrazione, di ridurre ogni concetto ad immagine ed ogni ragionamento a commento di illustrazioni.

Invece un grande matematico greco affermò che "non esiste via regia" per chi vuole intendere la matematica: di fronte alla scienza non esistono classi né privilegi di nascita, e il raggiungimento del sapere è sempre stato, ed ancora rimane, una impresa ed una conquista individuale. Ma si tratta di un'impresa che ha un valore altissimo, se è vero ciò che il grande matematico Vito Volterra scrisse a Mussolini, rifiutando di prestare giuramento al regime fascista: "Gli imperi cadono - scrisse Volterra - ma i teoremi di Euclide vivono di eterna giovinezza".

Pertanto la preparazione di una sala della matematica offre notevoli difficoltà: riteniamo tuttavia che valga la pena di intraprendere un lavoro cosiffatto, perché la matematica ha anche un aspetto estetico che non sempre è conosciuto.

Milano, 10 maggio 1993.

PROGETTO DI MASSIMA.

1 - I poliedri platonici. Pannelli esplicativi con i passi di Platone e la dimostrazione che non ce ne sono altri. Gruppi dei movimenti rigidi che mutano in sé un poliedro regolare (Pannelli).

I poliedri regolari stellati con esplicazioni storiche (Poinsot, Cauchy ecc.). Poliedri archimedei di vario tipo.

Pavimentazioni piane e cristalli.

2 - Cono e sue sezioni. Proprietà invarianti ecc. Fondamenti di geometria proiettiva. (Su pannelli) Quadriche rigate e loro sezioni. Superfici rigate sviluppabili e loro spigolo di regresso. Sezioni rotonde delle quadriche.

3 - Bonaventura Cavalieri ed i suoi teoremi (Pannelli). Curve e tangenti (Barrow, Newton).

Il metodo di exhaustion; la quadratura della parabola secondo Archimede. La scodella di Galileo.

4 - Eulero. Il giroscopio e sue proprietà. Composizione dei moti polari. Ingranaggi. Evoluta ed evolvente; (il biglietto di banca svizzero !).

Cicloide e sue proprietà (Pascal).

Huygens ed il pendolo isocronico.

5 - Gauss e le superfici curve. Sezioni normali, teoremi di Eulero e Gauss. Triangoli sferici e pseudosferici. Trasporto per parallelismo di Levi-Civita e curvatura totale.

6 - Le macchine del gruppo di Modena (rivisitate ed ampliate).

<http://www.mmlab.unimore.it/site/home.html><http://www.mmlab.unimore.it/site/home.html>

7 - Le configurazioni proiettive; la configurazione di Pappo-Pascal; la configurazione di Desargues.

Configurazioni spaziali: la configurazione del pentaedro.[Cfr. Hilbert e Cohn Vossen].

Le pavimentazioni piane (gruppi cristallografici). Interessa la simbolizzazione, cioè il passaggio dall'iconico al simbolico, invece del passaggio inverso, che è fonte della moderna atrofizzazione e mummificazione del pensiero.

8 - Coniche generate da una proiettività tra fasci; coniche involuppo.

9 - Planimetri ed integrali (Polare di Amsler ed altri).

10 - Algoritmi infiniti. Achille e la tartaruga, la quadratura della parabola e del cerchio, la soluzione delle equazioni per dimezzamento di intervalli e così via. Il tutto dovrebbe essere diretto a dare una giusta idea della soluzione del problema matematico, come ricerca metodica di informazioni, sempre migliorabili anche se non definitivamente acquisite o acquisibili.

11 - Modelli elettrici ed idraulici per la soluzione di equazioni. Il concetto di modello nella scienza. Nomogrammi e nomografia.

12 - Pierre Curie ed i collegamenti tra fenomeni fisici e la simmetria. " C'est la dissymétrie qui crée les phénomènes".

13 - Paradossi geometrici; $64 = 65$ (?) e loro spiegazione. Considerazioni sul significato e sui limiti dei modelli e delle figure.

SCHEDA1: Geodetiche e trasporto parallelo su una superficie.

SCOPO DELLA SCHEDA: *Presentare i problemi del trasporto di una direzione sul piano e su una superficie curva.*

1 - Il concetto di *rette parallele* e di *parallelismo* è uno dei più noti e comunemente usati, anche nelle espressioni quotidiane del pensiero. Questo concetto è stato espresso rigorosamente da Euclide nei suoi "Elementi", cioè nel primo trattato rigorosamente scientifico della Storia. Euclide enuncia le proprietà del parallelismo tra rette in un Postulato, ovvero con una proposizione non dimostrata. Questo postulato enunciato da Euclide è celebre perché attorno ad esso si sviluppò tutta una serie secolare di ricerche e di dispute, che nel secolo XIX portò, come esito finale, alla costruzione di quelle che vengono chiamate "Geometrie non-euclidee".

Il postulato in parola, enunciato da Euclide, equivale sostanzialmente all'affermazione della proposizione seguente: Data in un piano una retta r , e considerato un punto P del piano che non appartenga a r , per P passa una unica parallela alla retta data. Questa parallela per P alla r può essere costruita con operazioni elementari, e con l'impiego di quei soli strumenti (riga e compasso) che sono chiamati abitualmente *strumenti geometrici elementari*.

Qualora si cerchi di esprimere le stesse cose con altre parole, si potrebbe prendere in considerazione il concetto intuitivo di *direzione* nel piano. Questa viene considerata univocamente associata ad ogni retta del piano; e con questa nomenclatura il postulato della parallela potrebbe essere enunciato dicendo che, assegnata nel piano una qualunque direzione, in ogni punto esiste una ben determinata direzione, che viene detta parallela alla prima; spesso addirittura ci si esprime dicendo che le due direzioni *coincidono*.

Sempre con atteggiamento molto vicino all'intuizione, ed all'insieme di concetti generati in noi dalla manipolazione degli oggetti rigidi, si suole rappresentare la direzione di una retta nel piano mediante un vettore. E le proprietà geometriche esposte poco sopra potrebbero essere enunciate dicendo che un vettore può essere trasportato parallelamente a se stesso, fino a far coincidere la sua origine con un punto qualunque del piano. Tale trasporto potrebbe essere descritto nel modo seguente: Dato un vettore \mathbf{v} , avente la sua origine in un punto A , e dato un altro punto A' , il vettore parallelo a \mathbf{v} ed avente la sua origine in A' può essere costruito facendo in modo che entrambi i vettori formino angoli tra loro uguali con la retta congiungente A' con A (fig.1).

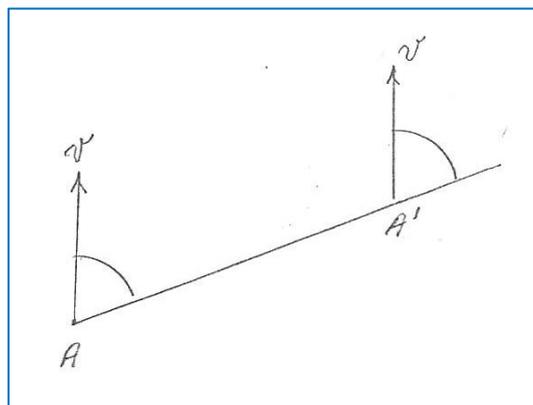


Figura 1

2 - Queste immagini forniscono le idee per estendere la procedura anche ad una superficie che non possa in alcun modo essere distesa sul piano (per esempio una superficie sferica); e le stesse immagini permettono anche di mettere in evidenza certe fondamentali differenze tra le superfici stesse.

A questo scopo si può anzitutto fare l'osservazione (del tutto banale) che la sola superficie sulla quale esiste un sistema doppiamente infinito di rette è il piano. Su una superficie curva, diversa dal piano, può esistere al massimo un sistema semplicemente infinito di rette; in tal caso la superficie viene qualificata come *rigata*. Quindi non è possibile trasferire ad una superficie non piana tutte le osservazioni e le procedure svolte a proposito del piano.

Questo trasferimento è eseguito in qualche caso, e per alcune proprietà, nel caso in cui la superficie di cui si tratta, pur non coincidendo con il piano, possa tuttavia essere spiegata ed adagiata sul piano senza alterazioni di distanze e di angoli; in questo caso la superficie viene chiamata *svilupicabile*, e si usa anche dire che essa è *applicabile* sul piano. Ma queste operazioni non sono eseguibili per una superficie in generale; per esempio non sono possibili per la sfera.

Nell'ambito delle considerazioni che ci interessano qui, risultano particolarmente interessanti certe curve di una superficie che realizzano il cammino di minima lunghezza tra due punti; tali linee vengono chiamate *geodetiche* della superficie. Nel caso del piano tali linee sono, come è noto, le rette; nel caso di una superficie sviluppabile tali linee sono quelle che si trasformano in rette quando la superficie stessa sia adagiata sul piano, senza variazioni di distanze e di angoli.

Nel caso di una superficie che non sia sviluppabile le linee geodetiche sono soluzioni di certe classiche equazioni differenziali del secondo ordine, che traducono la loro proprietà fondamentale, cioè il fatto di realizzare il cammino di lunghezza minima tra due punti della superficie. Per esempio, nel caso della sfera, tali linee sono i suoi cerchi massimi, cioè le curve intersezioni della sfera con dei piani diametrali, ossia passanti per il suo centro. Per esempio, nel caso della superficie terrestre, assimilata con buona approssimazione ad una grossa sfera, i meridiani e l'equatore sono delle geodetiche; ma non è tale alcun parallelo, diverso dall'equatore.

Le curve geodetiche di una superficie hanno in comune con le rette del piano la proprietà di dipendere da due parametri essenziali; ed in generale si ha che, dati due punti distinti della superficie, essi determinano una unica geodetica che li congiunge. Per esempio, sulla sfera due punti non diametralmente opposti determinano un unico cerchio massimo; la clausola che i due punti non debbano essere diametralmente opposti indica che occorrono alcune precauzioni nella scelta della coppia di punti; in forma approssimata, si suol dire che i due punti debbono essere *abbastanza vicini*; espressione non rigorosa, ma che può essere accettata almeno provvisoriamente per aiutare l'intuizione.

Questa proprietà delle geodetiche permette di definire una procedura di trasporto delle direzioni dei vettori tangenti alla superficie. Questi, ovviamente, in generale non giacciono sulla superficie stessa, ma, anche in questo caso, per aiuto alla intuizione, si usa anche dire che sono vettori della superficie. Orbene, dati due punti A ed A' della superficie, si considera la geodetica (che, sotto certe condizioni, è unica e ben determinata) che congiunge A con A' ; dato un vettore della superficie in A , è possibile definire un unico vettore in A' che formi ivi con la geodetica un angolo uguale a quello che il vettore considerato in A forma ivi con la geodetica stessa. Si usa dire che il vettore considerato è stato *trasportato* lungo la geodetica da A in A' ; e la relazione tra i due vettori viene anche chiamata *parallelismo secondo Levi-Civita*.

Questa procedura di trasporto permette quindi di estendere alcune proprietà della relazione di parallelismo, che vale nel piano, ad una superficie che non è applicabile al piano. Inoltre la stessa procedura permette di mettere in evidenza, come abbiamo già annunciato, alcune sostanziali differenze tra il piano e una superficie curva.

Come esempio, consideriamo anzitutto nel piano un triangolo di vertici A, B, C (fig.2), e supponiamo di trasportare un vettore lungo il suo perimetro, partendo dal vertice A , secondo la procedura descritta; in questo caso le geodetiche del piano sono i segmenti di retta, cioè i lati del

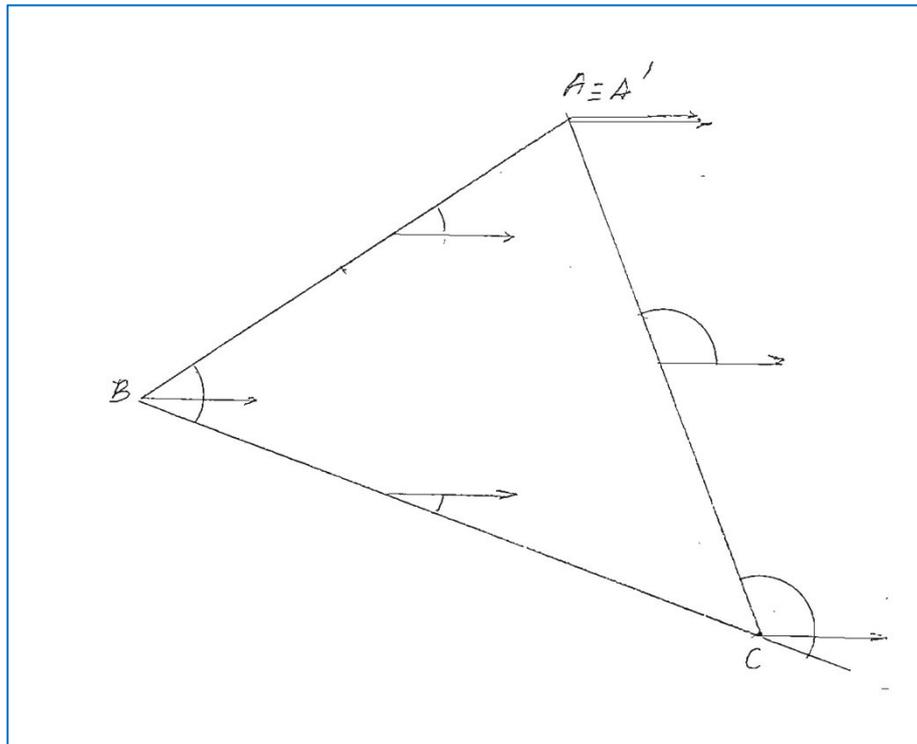


Figura 2

triangolo. La procedura in parola prescrive che il vettore venga trasportato in modo che in ogni punto del perimetro esso faccia sempre lo stesso angolo con il lato su cui l'origine del vettore stesso viene fatta "scorrere"; in base a considerazioni di geometria del tutto elementare si ha che, percorrendo il perimetro del triangolo in modo da toccare successivamente i vertici A, B, C , quando il ciclo si chiude con il raggiungimento del punto di partenza (in figura tale punto è stato indicato con A' , per mettere in evidenza il fatto che esso è punto di arrivo, oltre che punto di partenza), il vettore "di arrivo" si sovrappone a quello "di partenza".

Le cose vanno in modo completamente diverso sulla superficie sferica: la fig. 3 mostra per esempio $\frac{1}{8}$ di superficie sferica, e su di essa un triangolo di vertici A, B, C , i cui lati sono geodetiche della sfera, cioè dei cerchi massimi di essa. Per semplicità possiamo immaginare che il triangolo sia trirettangolo: se immaginiamo per esempio che la figura rappresenti una parte della sfera terrestre, possiamo pensare che il punto A sia il polo Nord, che il lato AB sia $\frac{1}{4}$ di meridiano, il lato BC sia $\frac{1}{4}$ di equatore, ed il lato CA sia ancora $\frac{1}{4}$ di meridiano. Immaginiamo ora di partire dal punto A (Polo Nord) con un vettore tangente al quarto di meridiano AB ; giunti in B , tale vettore risulterà perpendicolare al quarto di equatore BC ; e così potrà essere trasportato fino al punto C , e sarà quindi ivi tangente al quarto di meridiano CA . Il vettore potrà quindi essere trasportato fino al punto A' coincidente con A , sempre tangente alla stessa geodetica. Pertanto nel punto A' esso risulterà ruotato di un quarto di giro in senso antiorario.

In generale si può dimostrare che un fenomeno analogo si verifica quando si trasporti un vettore per parallelismo di Levi-Civita lungo un ciclo chiuso; ed inoltre si ha che l'angolo di cui il vettore

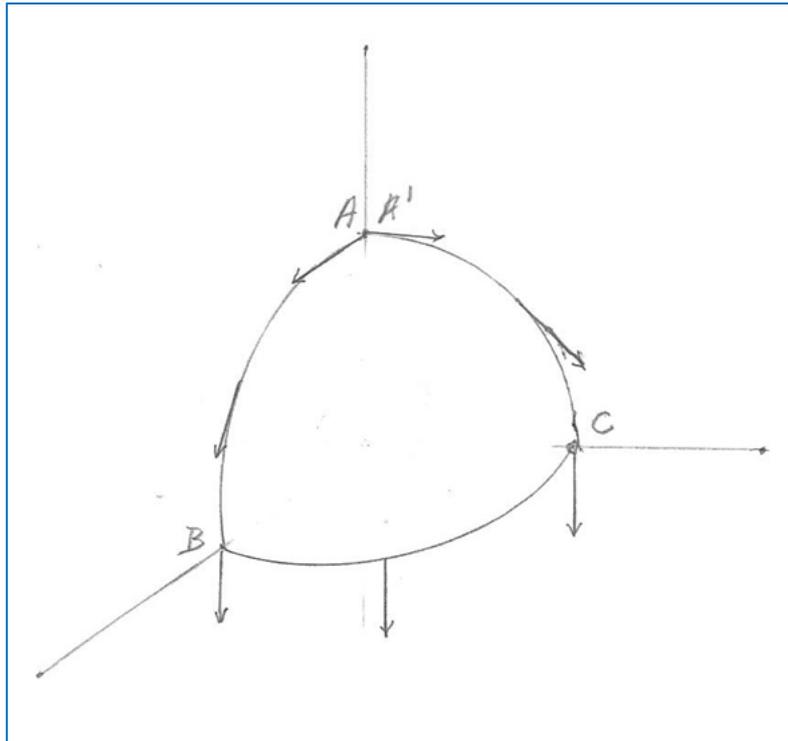


Figura 3

risulta ruotato è proporzionale all'area del pezzo di sfera il cui confine è il ciclo lungo il quale il vettore è stato trasportato.

L'esempio presentato costituisce un caso molto particolare di una proprietà fondamentale che distingue il piano e le superfici che si possono applicare su di esso dalle altre superfici per le quali l'applicazione non è possibile.

OSSERVAZIONI E PROPOSTE

Si potrebbero escogitare molte realizzazioni delle idee esposte, e non resterebbe che l'imbarazzo della scelta.

1 - Si potrebbe pensare ad una cupola semisferica trasparente, alta in modo che si possa stare in piedi di sotto. Sulla cupola potrebbero essere tracciati vari triangoli geodetici; gli operatori potrebbero far muovere dei vettorini metallici che stanno sulla cupola per mezzo di magneti posti sulle cime di pertiche.

2 - Oppure la cupola potrebbe essere di proporzioni più modeste, ed i vettorini potrebbero essere fatti aderire per es. con ventose, e spostati dall'esterno della cupola.

3 - Si potrebbero installare dei modelli di piano e mettere a disposizione degli elastici, per far tracciare le geodetiche. Lo stesso potrebbe essere fatto sulla superficie sferica. E su altre superfici. A questo proposito il discorso sarà ripreso nella Scheda 2, dedicata alle curve di inseguimento e superfici pseudosferiche.

SCHEDA2: Curve d'inseguimento e pseudosfera

SCOPO DELLA SCHEDA: *Esporre i problemi delle curve di inseguimento nel piano ed il loro rapporto con la pseudosfera di Beltrami.*

Le curve dette *di inseguimento* sono state studiate da tempo, come esempi tipici di problemi di cinematica. Esse vengono presentate in modo suggestivo parlando appunto di inseguimento di un animale B (preda) da parte di un altro animale A (predatore), il quale, ad ogni istante della sua corsa, si dirige verso la posizione all'istante stesso occupata dalla preda. Si intuisce che questa condizione conduce immediatamente a rappresentare ognuno di questi fenomeni con una equazione differenziale. Tuttavia è facile convincersi che le modalità in cui il fenomeno stesso si può presentare possono essere molto diverse: infatti la preda può descrivere una curva di fuga della natura più varia e con diverse velocità; ed il predatore a sua volta può avere le velocità più varie.

Alcuni casi sono tuttavia interessanti per la loro semplicità e per i collegamenti che essi hanno avuto, nel corso della Storia, con importanti problemi riguardanti i fondamenti della geometria. Presentiamo il caso in cui la preda B percorra la retta di equazione $y = 1$ di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale monometrico; si suppone che la fuga incominci dal punto di coordinate $(1, 1)$ e l'inseguitore si trovi all'inizio nel punto A , di coordinate $(0, 0)$; pertanto all'istante iniziale la distanza tra i due vale $\sqrt{2}$. Si suppone infine che le velocità dei due protagonisti siano tali che la distanza tra essi sia costante, e che ovviamente ad ogni istante la direzione del moto dell'inseguitore sia quella della retta che unisce i due punti A e B .

Scegliamo di rappresentare la traiettoria del punto A (l'inseguitore) in forma parametrica; scegliamo come parametro l'angolo α , che la tangente alla traiettoria, ad ogni istante, forma con l'asse delle x ; tale angolo decresce dal valore $\pi/4$ a zero. Si ha quindi:

$$(1) \quad \pi/4 \geq \alpha > 0.$$

Con questa scelta si ha

$$(2) \quad 1 - y = \sqrt{2} \sin \alpha,$$

ossia:

$$(2 \text{ bis}) \quad y = 1 - \sqrt{2} \sin \alpha,$$

quando α descrive l'intervallo determinato dalle (1). Come è noto, si ha:

$$(3) \quad \frac{dy}{dx} = \tan \alpha,$$

e d'altra parte si ha:

$$(4) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{dx}.$$

Tenendo conto di (2 bis) e (3) si ottiene, dopo pochi calcoli che non riportiamo ,

$$(5) \quad dx = \sqrt{2} \left(\sin \alpha - \frac{1}{\sin \alpha} \right) d\alpha.$$

Di qui, integrando e tenendo conto delle condizioni iniziali, si ottiene:

$$(6) x = 1 - \sqrt{2} \cos \alpha + \sqrt{2} (\log \tan \frac{\pi}{8} - \log \tan \frac{\alpha}{2}).$$

Le formule (6) e (2 bis) forniscono la rappresentazione analitica delle coordinate della curva, in funzione del parametro α che descrive decrescendo l'intervallo determinato dalle relazioni (1): fig.1.

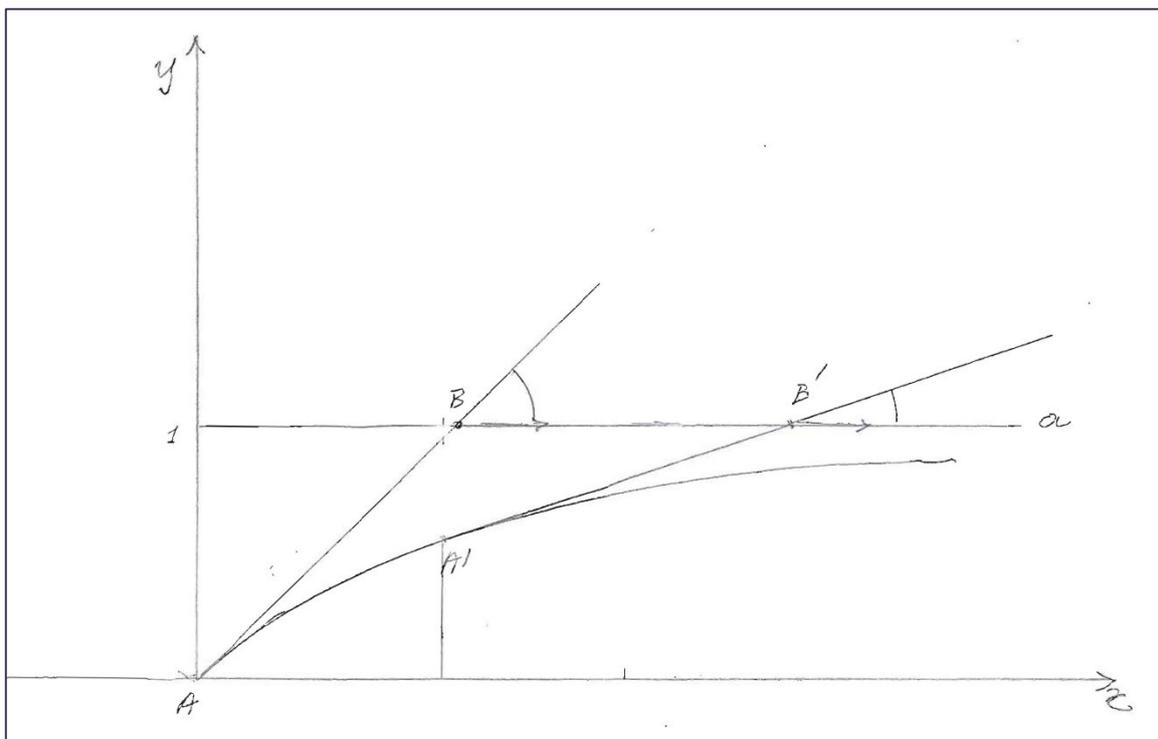
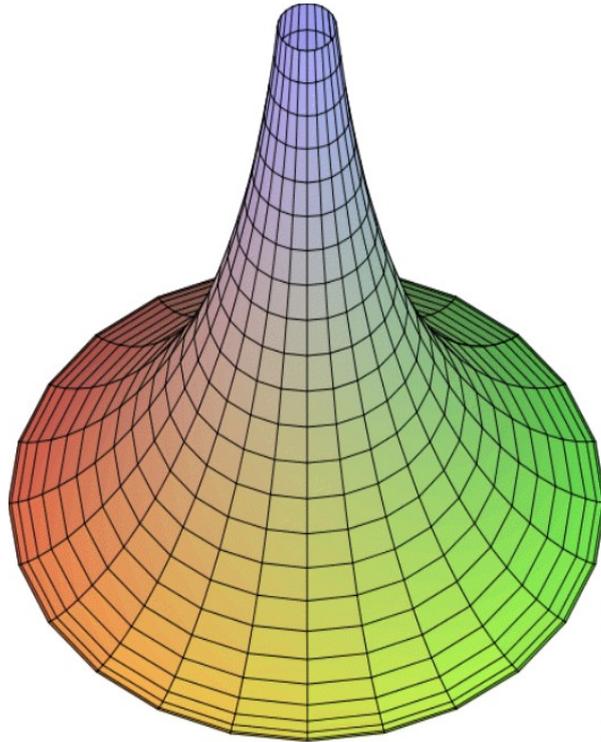


Figura 1

La curva ha come asintoto la retta di equazione $y = 1$.

Facendo ruotare nello spazio questa curva attorno all'asintoto si ottiene una superficie rotonda che si estende all'infinito e, con la sua forma, richiama la parte svasata di una tromba da orchestra; essa ha una proprietà importante: la sua curvatura gaussiana è negativa e costante da punto a punto, e per tale ragione la superficie viene anche chiamata *pseudosfera*. È possibile prendere in considerazione le geodetiche di questa superficie, e di conseguenza anche considerare un triangolo geodetico, ed eseguire il trasporto per parallelismo di un vettore lungo il perimetro del triangolo geodetico. Alla fine della procedura, il vettore trasportato non si sovrappone al vettore di partenza, ma risulta ruotato in senso orario (negativo) rispetto ad esso di un angolo proporzionale alla superficie del triangolo.



Questa superficie è servita al Beltrami per fornire un modello del piano della geometria non-euclidea di Lobačevskij: infatti il Beltrami sviluppò la trigonometria dei triangoli geodetici di questa superficie e constatò che essa coincide con la trigonometria del piano non euclideo iperbolico. (*)

OSSERVAZIONI E PROPOSTE

La realizzazione concreta di una curva d'inseguimento, in modo da permettere una certa interazione, potrebbe essere ottenuta in molti modi: si potrebbe pensare alla preda materializzata con una lucina che si muove di moto rettilineo (oppure anche su un percorso diverso) ed al predatore realizzato con un piccolo robot che segue la luce. In questo caso si potrebbero realizzare vari casi di curva, variando le velocità dei protagonisti (o anche soltanto quella di uno solo di essi) in modo da rendere possibile la cattura della preda oppure la sua fuga, tale da renderla irraggiungibile, perché la sua distanza cresce oltre ogni limite.

In forma molto più economica si può realizzare una situazione materiale, che sia modello di quella descritta matematicamente poco sopra, mediante quello che si potrebbe chiamare un *monopattino schematico* (fig.2). In questo apparecchio la punta *B* descrive la curva di fuga (la retta nel caso trattato) e la rotella posteriore ha il bordo tagliente, quanto basta per non permettere gli spostamenti laterali, in direzione perpendicolare al piano del disco (quei movimenti che i francesi chiamano di *déravage*): chiamando *A* il punto di contatto della rotella col piano, si ha chiaramente che, quando *B* si muove, *A* descrive una curva d'inseguimento; e precisamente il caso particolare di tale curva in cui la distanza tra la preda ed il predatore rimane costante.

Questo dispositivo realizza quindi uno dei più semplici esempi di sistemi di punti con legami *anonomi*, cioè legami di sola mobilità e non di movimento: come avviene per l'automobile, il sistema, nel piano infinito, può essere portato in una posizione qualunque *ma non con una traiettoria qualunque*.

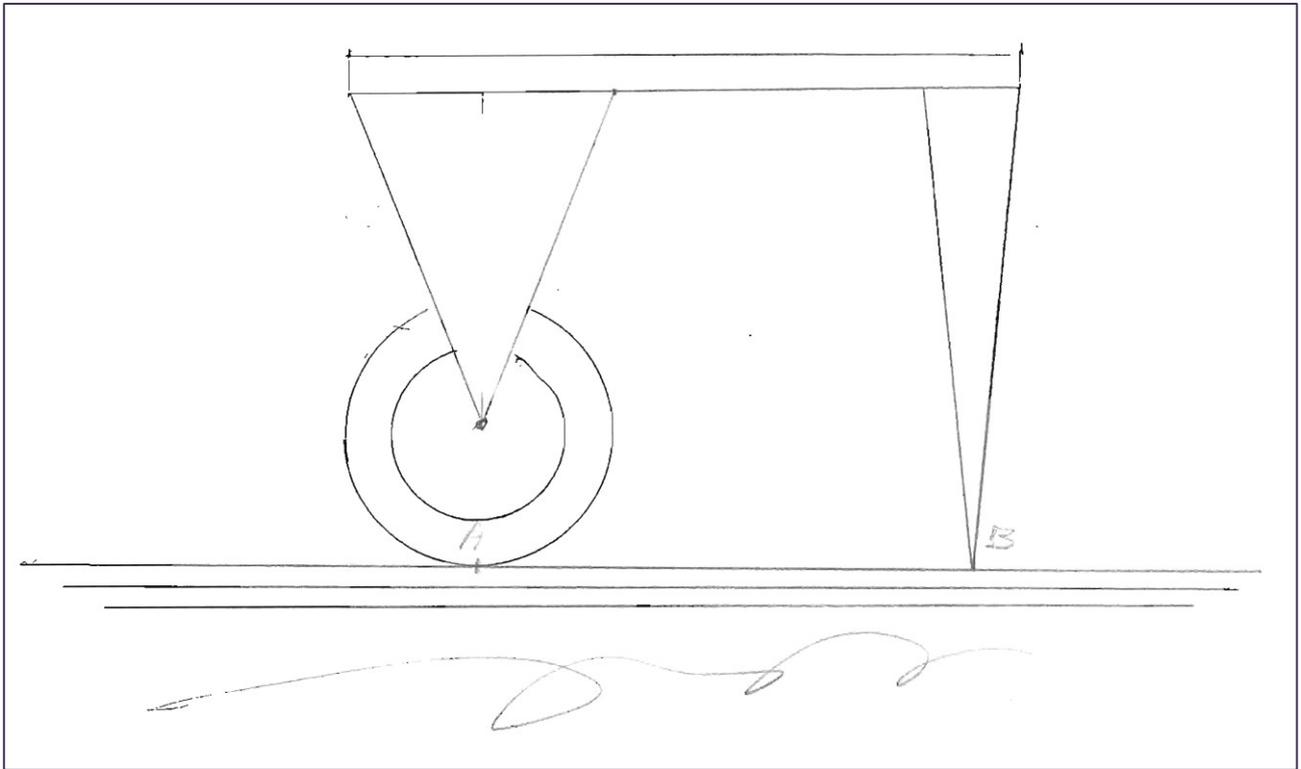


Figura 2

NdR

(*) Si possono vedere riferimenti agli indirizzi

<http://mate.unipv.it/~cornalba/lezioni/beltrami.pdf>

<http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Mathematicians/Beltrami.html>

Di Carlo Felice Manara si può vedere nel Sito:

[Eugenio Beltrami. Matematico ed artista.](#) (Conferenza tenuta a Cremona in commemorazione di Eugenio Beltrami il 7 maggio 1982, in occasione della celebrazione del bimillenario della città di Cremona).

SCHEDA 3: Quadratura del cerchio.

SCOPO DELLA SCHEDA: *Dare un'idea delle procedure, teoriche e pratiche, che sono state escogitate, nel corso dei secoli, per misurare l'area del cerchio e la lunghezza della circonferenza.*

1 - Il termine *quadratura* significa qui *misura dell'area*, quindi *quadrare il cerchio* significa determinare l'area del cerchio confrontandola con quella di un quadrato dato, scelto come unità di misura delle aree. Scegliendo come quadrato quello costruito sul raggio del cerchio, il problema della quadratura si riconduce alla determinazione del rapporto fra l'area del cerchio e quella del quadrato costruito sul suo raggio. Questo rapporto viene oggi indicato abitualmente con la lettera greca π (letta "Pi greco" o anche semplicemente "Pi").

2 - La determinazione del valore di π è un problema di cui i matematici si sono occupati da secoli. Per esempio alcuni storici hanno creduto di poter descrivere la procedura adottata dagli egiziani per ottenere una valutazione approssimata di π nel modo seguente.

Si consideri il quadrato che ha come lato il raggio del cerchio; si divida ogni lato del quadrato in 9 parti uguali, e si traccino, per ogni punto di divisione, le parallele ai lati. In tal modo il quadrato originario si troverà diviso in $9 \cdot 9 = 81$ quadratini, tutti uguali. Facendo centro in uno dei vertici del quadrato, si tracci poi un quarto di circonferenza, prendendo come raggio il lato del quadrato stesso. Dopo questa operazione alcuni degli 81 quadratini risulteranno completamente interni alla circonferenza, altri risulteranno completamente esterni ad essa ed altri saranno attraversati dalla circonferenza tracciata. Precisamente si possono contare 54 quadratini interni, 12 quadratini esterni e 15 quadratini attraversati dal quarto di circonferenza (fig. 1). Se ora si immagina di valutare, come si dice, "ad occhio" le parti interne ed esterne di questi ultimi quadratini, si può giungere ad una valutazione verosimile di un rapporto di $64/81$ quadratini ricoperti dal quarto di cerchio limitato da due lati del quadrato e dal quarto di circonferenza; e quindi valutare il rapporto tra l'area del cerchio e quella del quadrato costruito sul suo raggio con il numero $(4 \cdot 64)/81 = 3,160\dots$ Questo numero risulta approssimato per eccesso rispetto alle informazioni che oggi possediamo, e l'errore non supera il 2 per cento.

3 - Un'altra procedura per misurare l'area del cerchio potrebbe essere la seguente.

Si inscriva nella circonferenza un poligono regolare, non intrecciato; allora si può cercare di calcolare un valore approssimato dell'area del cerchio sommando le aree dei triangoli tutti uguali che hanno il vertice comune nel centro e che hanno le loro basi nei lati del poligono. Da questa immagine si passa presto a dimostrare il teorema il quale afferma che l'area del cerchio è uguale a quella di un triangolo che ha come altezza il raggio del cerchio e come base un segmento lungo come la circonferenza, o, come si suole dire, la *circonferenza rettificata*.

Si intuisce quindi lo stretto rapporto tra i due problemi: quello della quadratura del cerchio e quello della rettificazione della circonferenza. Ed in questo caso il termine *rettificazione* significa confronto della lunghezza della circonferenza con quella di un segmento assegnato: per esempio il raggio della circonferenza stessa.

Anche questo problema è stato preso in considerazione da tempo, ed è facile convincersi, pur con misure molto rudimentali, che la lunghezza della circonferenza è poco più di tre volte quella del suo diametro. Per esempio già nella Bibbia (nel I libro dei Re, VII, 23 e nel passo parallelo del II libro delle Cronache, IV,2) viene detto di passaggio, descrivendo un grande bacino di bronzo, che la lunghezza della sua circonferenza è tre volte il suo diametro.

La procedura di valutare un valore approssimato della lunghezza della circonferenza misurando il perimetro di un poligono regolare non intrecciato inscritto in essa è stata sfruttata da Archimede (287-212 a.C.) per conseguire rigorosamente un valore approssimato di π ; e per questa ragione questo numero è anche spesso chiamato *costante di Archimede*. Egli valutò un valore approssimato del perimetro di un poligono regolare di 96 lati inscritto nella circonferenza, partendo da un esagono inscritto e raddoppiando successivamente il numero dei lati, per 4 volte. Il valore calcolato da Archimede è approssimato per eccesso ed è comodamente rappresentato dalla frazione $22/7 = 3 + 1/7$. Con procedure elementari si può giungere a scrivere:

$$3 + 10/71 = 223/71 < \pi < 22/7 = 3 + 1/7.$$

E si verifica che la differenza tra i due valori approssimati, quello per eccesso e quello per difetto, è di poco superiore ad un millesimo.

Oggi si sa che il numero π non può essere rappresentato esattamente con un numero finito di cifre, ed il suo valore esatto non può essere determinato con un numero finito di operazioni algebriche.

A partire dal secolo XVI i matematici utilizzarono i metodi del calcolo infinitesimale per determinare valori sempre più approssimati di π . Il valore più approssimato ottenuto con calcoli fatti "a mano" fu dato nel 1874 da Shanks, il quale pubblicò 707 cifre decimali della costante di Archimede. Utilizzando gli strumenti elettronici moderni di calcolo le cifre ottenute superano il milione.

OSSERVAZIONI E PROPOSTE

4 - Per illustrare ciò che è esposto nel N. 2 si potrebbe pensare a un "poster" nel quale i quadratini delle tre specie (completamente interni, completamente esterni, e attraversati dalla circonferenza) siano colorati diversamente.

Per illustrare la procedura di Archimede si potrebbe pensare di costruire un tavolo a forma di semicerchio, con i bordi rilevati. Il diametro dovrebbe essere di 2 m, per facilitare la comprensione delle misure di cui si dirà subito. Il tavolo dovrebbe essere dotato di un orlo, per esempio metallico, rilevato. Nell'interno della superficie così delimitata potrebbero essere posti tre triangoli equilateri (fig. 2) aventi lati di lunghezza 1 m. Tali triangoli dovrebbero sporgere al di sopra del bordo, perché si possano fare i confronti tra le misure della circonferenza realizzata dal bordo e le misure dei perimetri dei vari semipoligoni regolari inscritti nella semicirconferenza. Le misure potrebbero essere fatte con una striscia graduata di materiale inestendibile, avente una estremità fissata nel punto A della semicirconferenza, in modo da poter circondare la figure realizzate sul tavolo fino al punto B. La misura iniziale del semiperimetro dell'esagono dà ovviamente 3 m.

Si costruiscono poi tre triangoli isosceli, tutti uguali tra loro, da inserire nelle tre lunule rimaste vuote, tra i lati del mezzo esagono ed il bordo in cui esso è inserito. (Nella fig. 1 uno di questi triangoli ha vertici A, A₁, A₂).

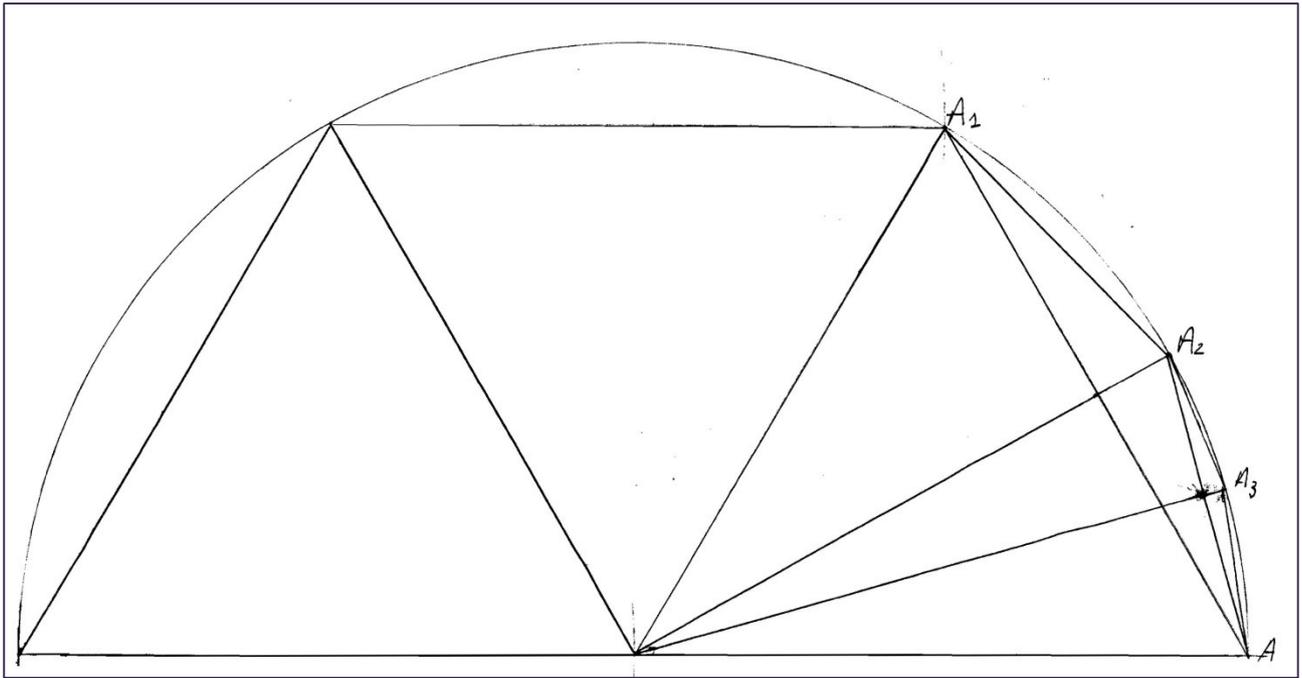


Figura 1

Uno qualunque di questi triangoli isosceli ha una base lunga (ovviamente) 1 m ed una altezza di 13,39... cm. Si ottiene così la metà di un poligono regolare di 12 lati, e misurando il semiperimetro si ottiene 3,105... Misura che si può assumere come valore approssimato di π .

Ci sono ora 6 lunule tra la metà del poligono di 12 lati ed il bordo del tavolo semicircolare. In queste debbono essere inseriti 6 triangoli isosceli, la cui base vale 51,76... cm e la cui altezza vale 3,40... cm. (Nella figura 2 uno di tali triangoli ha i vertici A, A_2 , A_3). Si ottiene così la metà di un poligono regolare di 24 lati, e la misura del perimetro di tale poligono vale 3,1326m ; misura che fornisce un secondo valore approssimato di π .

Si constata ora che la costruzione di altri triangoli da inserire nelle lunule rimaste , e poi quella di costruire i triangoli da inserire nelle lunule che si ottengono, diventa materialmente molto difficile. Con le dimensioni che abbiamo scelto per il tavolo semicircolare, e con gli strumenti di misura che possediamo, ogni sforzo materiale per ottenere ulteriori informazioni affidabili risulterebbe poco fondato. Invece il simbolismo matematico ed il calcolo permettono di proseguire l'operazione in modo distaccato dalle condizioni materiali, e quindi di conseguire informazioni esatte ad un livello che nessuna procedura materiale potrebbe permettere.

SCHEDA 4: Volume della sfera. Scodella di Galileo.

Si consideri un recipiente C (come Cilindro) a forma di cilindro circolare retto; sia R il raggio della base, e si supponga che l'altezza sia pure uguale ad R . Si inscriva in questo recipiente la metà di una superficie sferica S , avente pure raggio R , in modo che i due bordi (quello della mezza sfera e quello del recipiente cilindrico) coincidano; allora la mezza superficie sferica toccherà il fondo del recipiente nel suo centro, che indicheremo con Q . Si ottiene così un solido, una specie di scodella, che all'interno è limitata dalla mezza superficie sferica ed esteriormente è limitata dalla superficie laterale e dalla base del cilindro.

Il volume del cilindro è noto ed è facilmente calcolabile: se si potesse determinare il volume del solido "scodella", il volume della mezza sfera (e ovviamente quindi anche della sfera) si potrebbe ottenere per sottrazione di quello della scodella da quello del cilindro. Questo appunto ha fatto Galileo con una interessantissima procedura.

Chiamiamo per il momento O il centro della sfera, che è anche il centro del cerchio che forma il bordo della scodella, e consideriamo il cono circolare retto che ha vertice in O ed ha come base la base del cilindro. Galileo dimostra che il volume del cono è uguale al volume della scodella appoggiandosi sulle seguenti considerazioni: sechiamo le due figure (cono e scodella) con un piano che sia parallelo alla base comune al cono ed al cilindro; indichiamo con h la distanza di questo piano da O . Pertanto sarà $(R - h)$ la distanza del piano dalla base del cilindro e del cono. Il piano considerato interseca sul cono un cerchio, il cui raggio è h , come si dimostra facilmente; quindi la sua area è πh^2 . La scodella invece viene secata dal piano secondo una corona circolare: il raggio della circonferenza esterna della corona è ovviamente R ; il teorema di Pitagora permette poi facilmente di dimostrare che il quadrato del raggio della circonferenza interna vale $R^2 - h^2$. Quindi un facile calcolo permette di verificare che l'area del cerchio secato dal piano sul cono è uguale all'area della corona circolare.

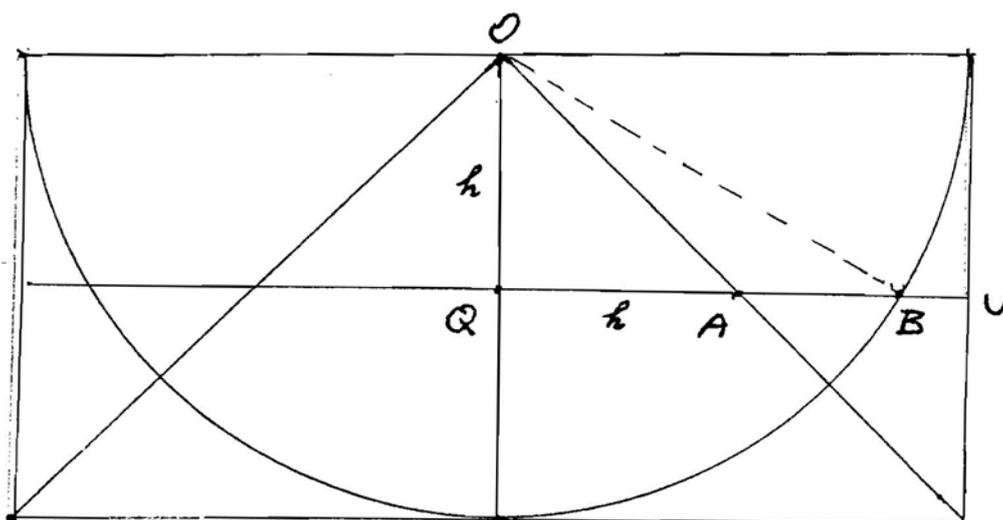


Figura 1

A questo punto Galileo intuisce un teorema fondamentale, che sarà in seguito enunciato da Bonaventura Cavalieri (1598-1647) come *principio* (non dimostrato) nella sua *Geometria degli indivisibili*, e che oggi si dimostra rigorosamente con gli strumenti dell'Analisi Matematica. Secondo questo principio, due solidi hanno volumi uguali se avviene che abbiano aree uguali *tutte* le sezioni dei solidi stessi ottenute con un piano che si muove mantenendosi parallelo a se stesso.

Di conseguenza Galileo ottiene il volume della mezza sfera sottraendo da quello del cilindro non il volume della scodella, ma quello del cono, che si sa calcolare elementarmente. La fig. 1 mostra una sezione della scodella fatta con un piano passante per l'asse del cilindro C. Il segmento QA è il raggio della sezione del cono con il piano che ha per traccia la retta sulla quale stanno tutti i punti Q, A, B, U. Il triangolo che ha per vertici i punti O, Q, A è ovviamente rettangolo isoscele, e quindi si ha $QA = QO = h$.

Il triangolo di vertici O, Q, B è rettangolo, ed il teorema di Pitagora conduce a concludere che

$$QB^2 = OB^2 = OQ^2 = R^2 - h^2.$$

La fig. 2 mostra le due sezioni ottenute con un piano parallelo alla base del cilindro. Il cerchio interno è la sezione del cono con il piano.

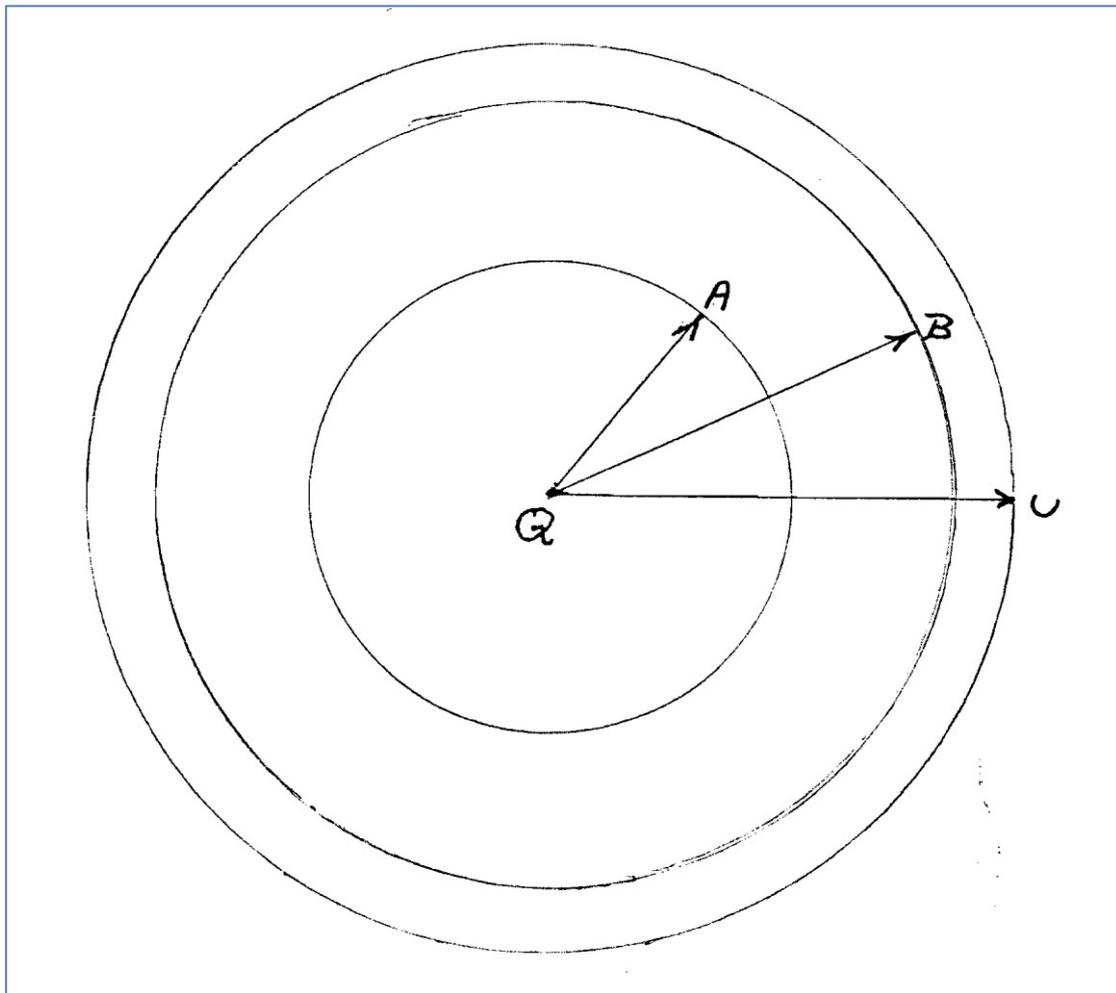


Figura 2

OSSERVAZIONE. Non dovrebbe essere difficile costruire in perspex i due solidi rotondi: la scodella e il cilindro con il cono inserito, e studiare una verifica sperimentale, del tipo di quella che è stata escogitata per il teorema di Pitagora: per esempio riempire una della due cavità di acqua e verificare poi che la stessa quantità di liquido riempie anche l'altra.

CFM 102799

SCHEDA5: Il procedimento di exhaustion.

SCOPO DELLA SCHEDA: *Presentare alcuni problemi classici riguardanti la determinazione dell'area di figure non poligonali, ed illustrare il procedimento di exhaustion.*

La quadratura del cerchio è soltanto il primo e più semplice dei problemi che si presentano quando si voglia determinare la superficie di una figura non poligonale: precisamente una figura il cui contorno possieda qualche tratto che non è rettilineo. La nostra matematica possiede oggi gli strumenti per risolvere il problema in un vastissimo insieme di casi; ma è appena necessario ricordare che gli strumenti teorici che noi possediamo sono il frutto di un lungo, secolare progresso, dovuto agli apporti di innumerevoli studiosi, e soprattutto alle intuizioni geniali di matematici il cui nome è rimasto nella storia della nostra scienza. Questi hanno avuto e sviluppato certe intuizioni che sono state punto di partenza per le teorie della scienza di oggi.

Uno di questi personaggi è senza dubbio Archimede (287-212 a.C.), che ha risolto il problema della quadratura del segmento di parabola con procedure che sfruttano la ripetizione di operazioni analoghe e l'avvicinamento indefinito ad un determinato valore numerico o ad una figura: procedure che hanno dato luogo ai concetti di *algoritmo* e di *limite* della nostra matematica.

Il geometra siracusano parte da certe proprietà della parabola sulla cui dimostrazione non possiamo soffermarci, e che pertanto ci limitiamo ad enunciare.

Siano A e B due punti qualunque di una parabola, e siano a e b le tangenti alla curva rispettivamente nei punti in parola (fig.1). Indichiamo con T il punto comune alle due rette a e b , e sia M il punto medio del segmento limitato dai due punti A e B . Indichiamo con C il punto in cui la parabola è intersecata dalla retta che congiunge M con T , e sia c la tangente alla curva in C . Indichiamo con A' e B' i punti in cui tale tangente interseca le rette a e b rispettivamente. Le proprietà a cui facevamo cenno sono le seguenti:

- 1) la tangente c alla parabola in C è parallela alla retta che congiunge A con B ;
- 2) il punto C è il punto medio del segmento che ha come estremi A' e B' ;
- 3) il punto C è anche il punto medio del segmento che ha come estremi M e T .

Quindi il segmento che ha come estremi A e B ha lunghezza doppia di quello che ha come estremi A' e B' , ed il triangolo che ha come vertici i punti A , B , T ha dunque area doppia del triangolo che ha come vertici A' , B' , T .

Su queste proprietà della parabola (che – ripetiamo – ci limitiamo a riportare omettendo la dimostrazione) Archimede adottò una procedura del tutto originale per calcolare la superficie della parte di piano limitata dal segmento di estremi A e B e dalla curva.

.....
.....

NdR.

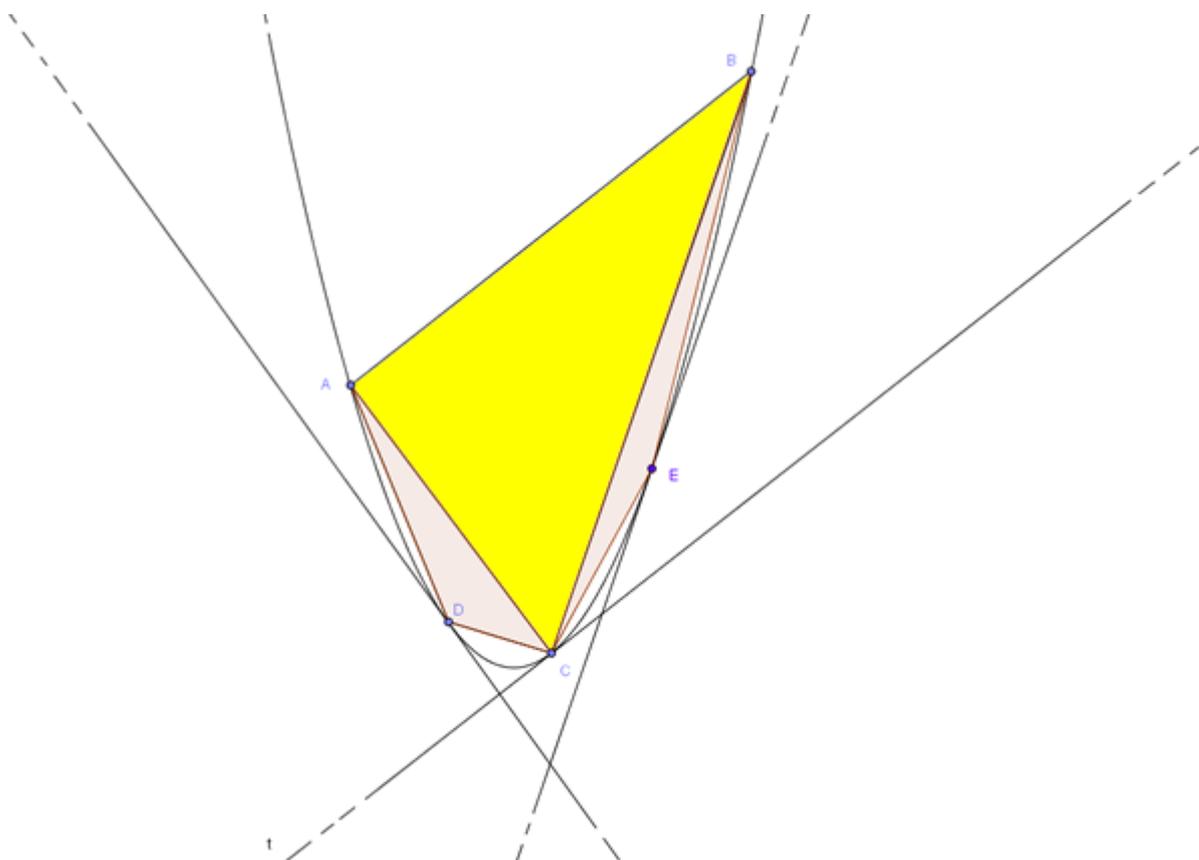
La scheda è incompleta. Si può trovare una trattazione dell'argomento ad esempio nel sito

<http://areeweb.polito.it/didattica/polymath>

da cui riprendiamo la citazione e la figura che illustra il procedimento cui evidentemente CFM si riferisce.

“.....Archimede dà poi una seconda, ma diversa dimostrazione del medesimo teorema dimostrando che l’area del triangolo inscritto maggiore, ABC, è quattro volte la somma delle aree dei corrispondenti triangoli inscritti ACD e BCE. Ripetendo il processo suggerito da questa relazione per i triangoli ACD e BCE, risulta chiaro che l’area K del segmento parabolico di partenza è data dalla somma della serie infinita:

$$T + \frac{T}{4} + \frac{T}{4^2} + \frac{T}{4^3} + \dots + \frac{T}{4^n} + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(T \cdot \frac{1}{4^n} \right) = T \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3} T.$$



.....
 Archimede non parla di somma della serie infinita perché ai suoi tempi i processi non finiti venivano disapprovati; ricorrendo invece a una duplice *reductio ad absurdum* Archimede dimostra che l’area di K non poteva essere né maggiore né minore di $\frac{4}{3} T$. “

Da <http://areeweb.polito.it/didattica/polymath>

Si può vedere l’argomento anche anche in <http://www2.dm.unito.it/paginepersonali/ferrarese/conferenze/Il%20metodo%20di%20Archimede.pdf>

SCHEDA 6: Dividere in parti uguali.

SCOPO DELLA SCHEDA: *Presentare l'aspetto geometrico dei problemi elementari classici riguardanti le grandezze; in questo caso il problema della divisione di una grandezza in parti uguali.*

1 - Uno dei problemi che conseguono dalla applicazione della geometria elementare alla realtà materiale è quello della divisione delle grandezze in parti uguali: questa operazione viene eseguita in modo facile sui segmenti, ed è il punto di partenza per la misura delle lunghezze. Il fondamento teorico della operazione, e di tutte le sue conseguenze, è costituito dal teorema che viene attribuito al geometra Talete [Talete di Mileto, ca 624-545 a. C. È annoverato tra i "sette savi" della Grecia].

La fig. 1 presenta un fascio di rette tra loro parallele, che determinano segmenti corrispondenti proporzionali su due secanti qualunque.

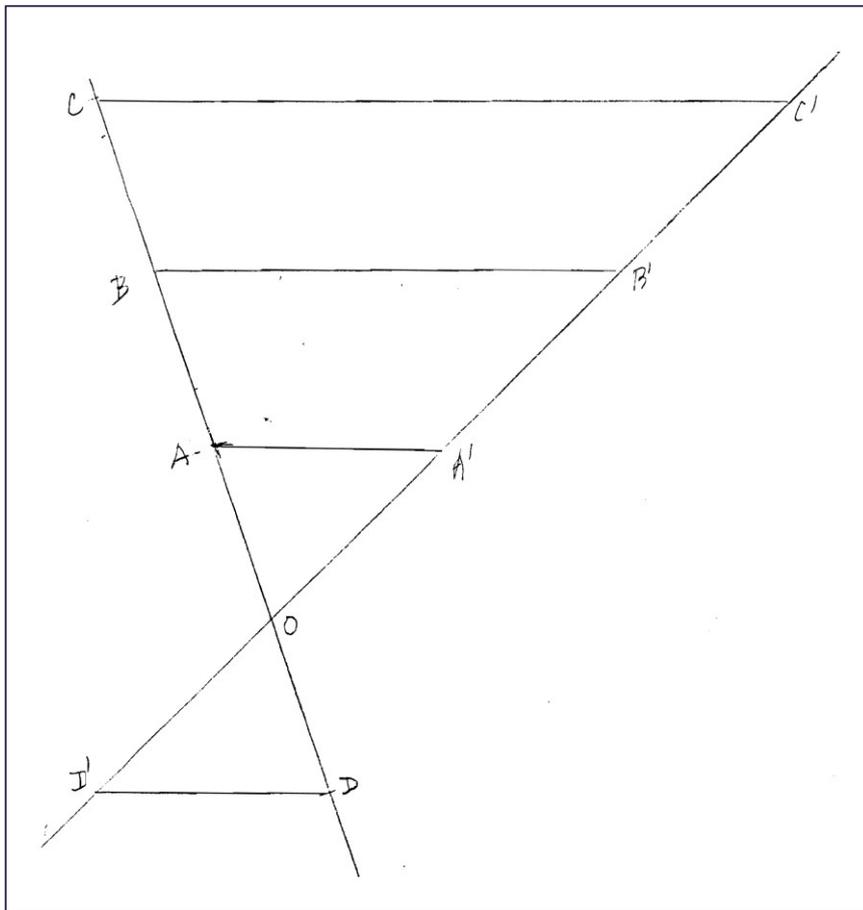


Figura 1

Questa proprietà viene sfruttata praticamente con uno strumento di impiego molto diffuso, che viene chiamato *pantografo* (v. fig. 2). Come è noto, esso può essere impiegato per ingrandire o rimpicciolire disegni, ed anche per costruire un sottomultiplo di un segmento dato secondo un numero intero n qualunque; nella figura si ha per esempio $n = 3$.

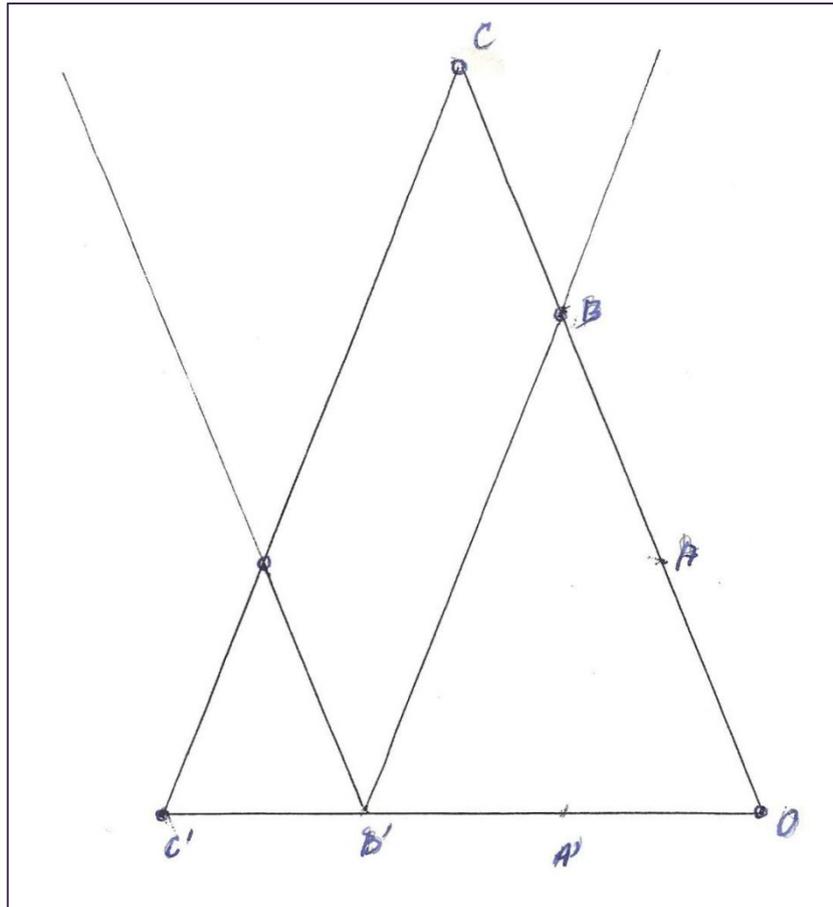


Figura 24

2 - L'operazione, che appare così semplice ed intuitiva nel caso dei segmenti, presenta delle difficoltà maggiori, ed in certo senso inattese, nel caso degli angoli. Infatti già nel caso della divisione di un angolo qualunque in tre parti uguali l'operazione non può *in generale* essere eseguita con i soli strumenti elementari (riga e compasso) che si impiegano per la divisione in parti uguali del segmento qualunque. Il corrispondente problema viene chiamato *problema della trisezione dell'angolo*, ed ha stimolato l'inventiva dei matematici fin dall'epoca classica. I Greci infatti ricondussero il problema della trisezione a quello della inserzione di un segmento di assegnata lunghezza soddisfacente a certe condizioni.

La situazione corrispondente è illustrata dalla fig. 3: siano a e b i lati dell'angolo che si vuole dividere in tre parti uguali, e sia O il suo vertice. Si tracci un arco di circonferenza con centro in O e raggio r arbitrario, e siano A e B i punti in cui l'arco di circonferenza interseca i lati a e b dell'angolo dato. Si immagini ora di poter trasportare rigidamente un segmento di estremi X ed Y in modo da soddisfare alle seguenti condizioni:

- 1) la lunghezza del segmento sia uguale al raggio r dell'arco di circonferenza dianzi tracciato;
- 2) l'estremo X del segmento stia sulla retta a cui appartiene il lato a dell'angolo dato;
- 3) l'estremo Y del segmento stia sull'arco di circonferenza;
- 4) la retta del segmento XY passi per B .

Se tutte le condizioni sono soddisfatte si dimostra che l'angolo BXA (con vertice in X) è un terzo dell'angolo dato BOA . La dimostrazione (che non riportiamo qui) si ottiene fondandosi sulle proprietà degli angoli interni dei due triangoli, entrambi isosceli, che hanno i vertici in BOY , ed in XYO .

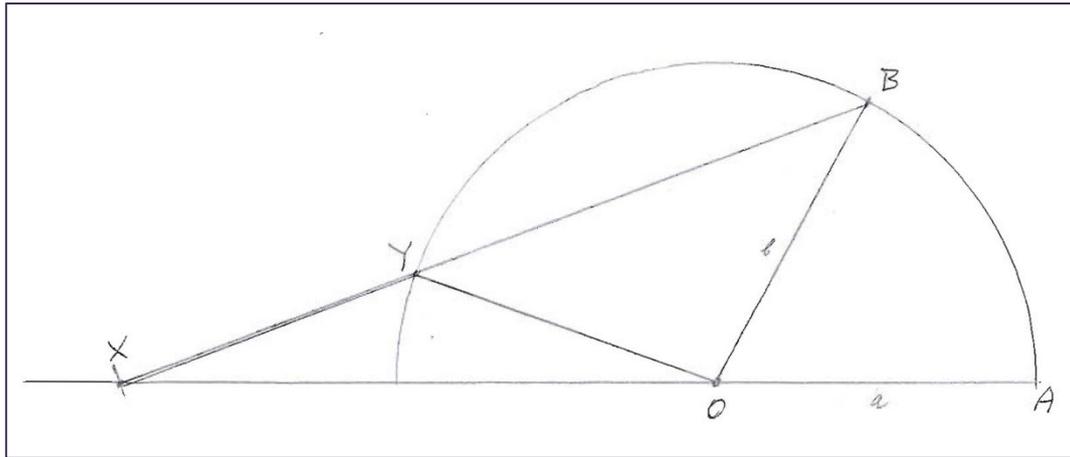


Figura 3

Secondo gli storici, la matematica greca considerava elementare e quindi ammetteva come rigorosamente valida l'operazione che consiste nell'inserire un segmento di lunghezza assegnata tra due curve. Operazione che appare facilmente immaginabile, se si accetta tra le operazioni ammissibili l'insieme delle nostre manipolazioni abituali sui corpi rigidi, ma che la critica moderna preferisce non considerare tra le operazioni elementari che conducono alla costruzione della soluzione rigorosa di un problema geometrico.

3 - Sulla costruzione ora esposta è fondato l'apparecchio illustrato nella fig. 4, che è uno dei numerosi *trisettori* inventati nel corso dei secoli.

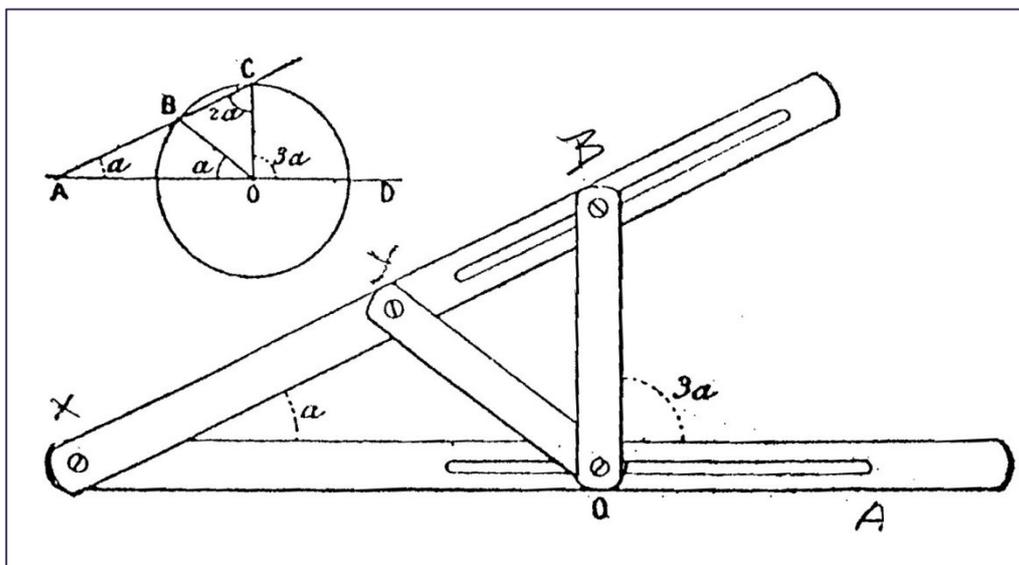


Figura 4

Tuttavia è possibile costruire anche altri meccanismi che sono atti alla soluzione del problema di trisezione dell'angolo e che appartengono alla categoria dei *poligoni articolati*, cioè meccanismi costituiti soltanto da aste rigide, collegate tra loro soltanto da snodi che permettono la rotazione

di un'asta rispetto a quella contigua. Uno di questi meccanismi è il *trisettore di Kempe*, illustrato nella fig. 5.

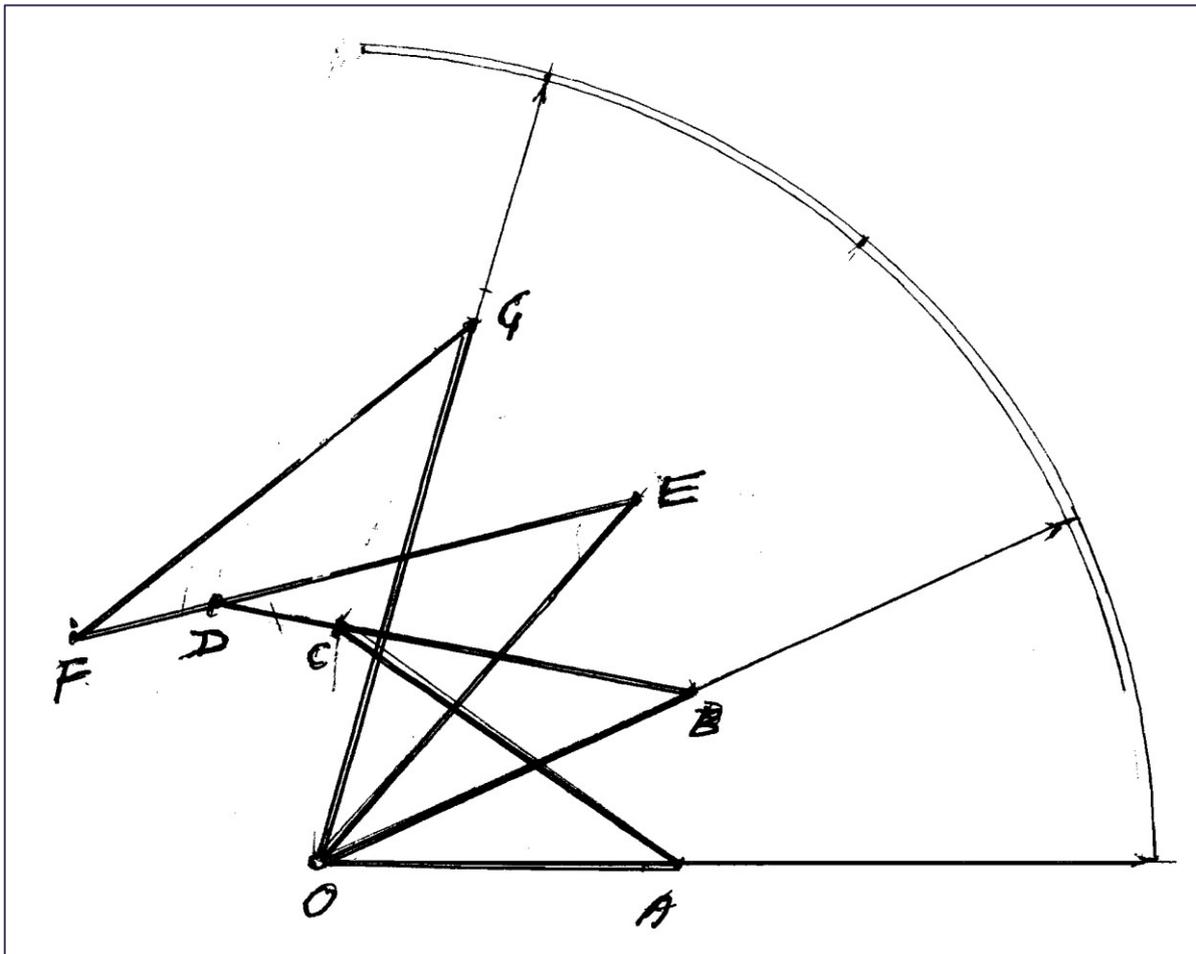


Figura 55

Il personaggio principale del meccanismo è un quadrilatero articolato intrecciato, come quello che ha i vertici in O, A, B, C . Tra le aste che formano il quadrilatero sussistono le seguenti relazioni:

$$(1) \quad OA = CB \quad ; \quad OB = AC.$$

Il punto D appartiene all'asta BC ed è tale che valga la relazione:

$$(2) \quad \frac{BD}{BC} = \frac{OB}{OA}.$$

Nel quadrilatero di vertici O, B, D, E si ha:

$$(3) \quad OE = BD \quad ; \quad OB = ED.$$

I due quadrangoli intrecciati rispettivamente di vertici O, A, B, C ed O, B, D, E risultano quindi simili, e in particolare si ha che gli angoli AOB e BOE , entrambi con vertice in O , sono tra loro uguali. Il punto F appartiene all'asta DE ed è tale che si abbia:

$$(4) \quad \frac{EF}{ED} = \frac{OE}{OB}.$$

Inoltre nel quadrilatero di vertici O, E, F, G si ha:

$$(5) \quad OE = FG \quad ; \quad OG = EF.$$

I due quadrilateri intrecciati di vertici O, B, D, E ed O, E, F, G risultano quindi simili, e in particolare si ha che i due angoli BOE ed EOG , entrambi con i vertici in O , sono uguali tra loro. In conclusione si

ha quindi che i tre angoli AOB , BOE , EOG sono tra loro uguali e di conseguenza l'angolo AOB è un terzo di AOG .

OSSERVAZIONE. Nulla impedisce che si costruiscano altri quadrangoli intrecciati simili ai primi tre finora considerati. Pertanto il dispositivo di Kempe può essere generalizzato, e condurre alla costruzione di un *polisettore*, cioè di un apparecchio costituito da aste rigide articolate tra loro, che permette di determinare meccanicamente il sottomultiplo un angolo secondo un intero n qualunque.

La fig. 6 mostra un poligono articolato che è costruito secondo i principi del trisettore di Kempe, e che realizza la costruzione di un angolo AOB che è la quinta parte di un angolo dato AOC .

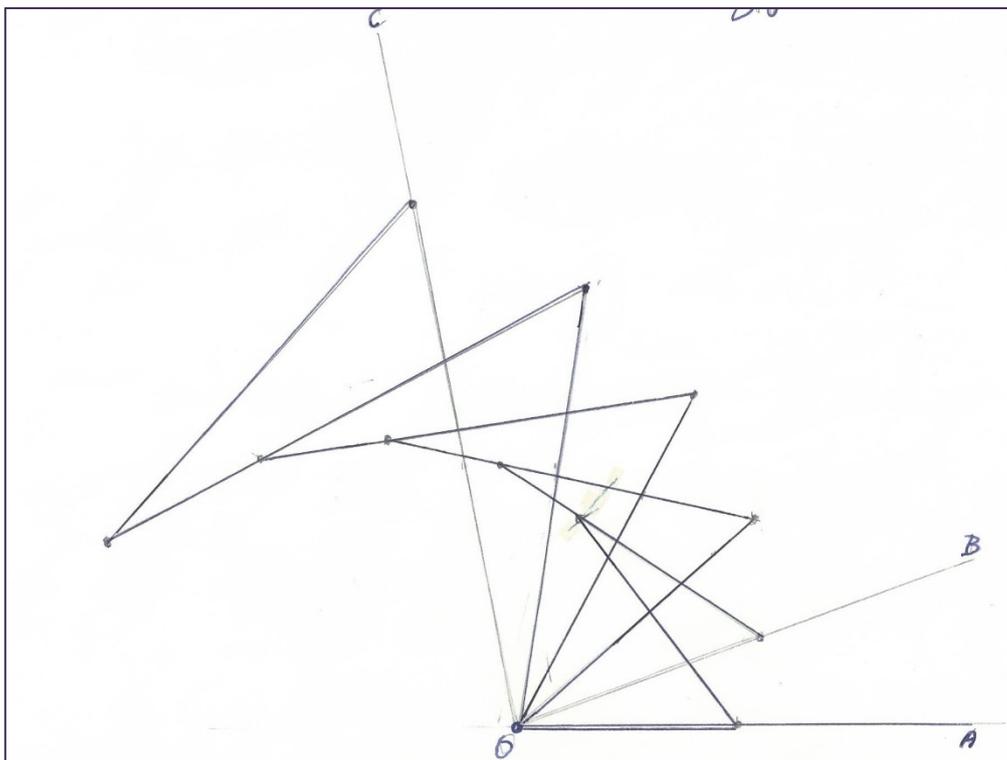
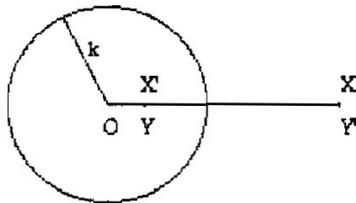


Figura 6

I - TEORIA DELL'INVERSOIRE DI PEAUCELLIER

1. Inversione circolare del piano

Dato nel piano un punto O (detto "polo") e fissata una costante k , si chiama "inversione circolare" di polo O e di costante k la corrispondenza tra punti x e x' del piano che ubbidisce alle seguenti leggi:



- a) due punti corrispondenti x, x' qualunque sono allineati con O ;
 b) sussiste la relazione

$$(1) \quad OX \cdot OX' = k^2.$$

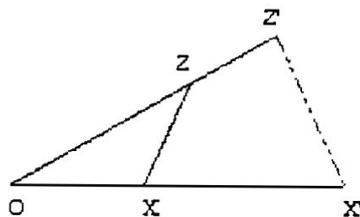
Osservazione 1. La corrispondenza è definita per ogni punto del piano ad eccezione del polo O .

figura 1

Osservazione 2. Ogni punto della circonferenza che ha O come centro e $|k|$ come raggio è unito per la corrispondenza.

Osservazione 3. Se x, x' sono punti corrispondenti allora anche $y \equiv x'$ ed $y' \equiv x$ sono corrispondenti. Si esprime questo fatto dicendo che la corrispondenza è involutoria.

Siano x, x' e z, z' due coppie di punti corrispondenti. Per la (1) si ha



$$(2) \quad OX \cdot OX' = OZ \cdot OZ'$$

da cui si ricava

$$(3) \quad \frac{OX}{OZ} = \frac{OZ'}{OX'}$$

Quindi i due triangoli OXZ e $OX'Z'$ sono simili e si ha in particolare:

figura 2

$$(4) \quad \begin{cases} O\hat{X}Z = O\hat{Z}'X' \\ O\hat{Z}X = O\hat{X}'Z' \end{cases}$$

In particolare sia p la retta per X perpendicolare alla OX , e sia $Z \in p$ (fig. 3). Allora il triangolo (OXZ) è rettangolo in X ; di conseguenza il triangolo $(OX'Z')$ è rettangolo in Z' ;

dunque al variare di Z su p , Z' descrive una circonferenza passante per O , avente OX come diametro.

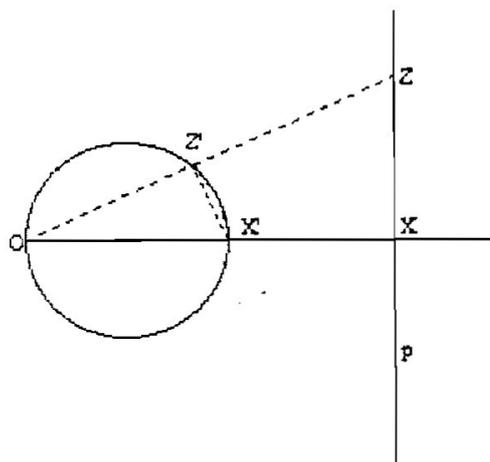
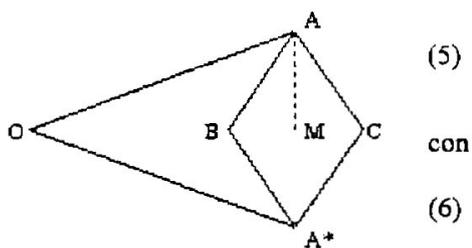


figura 3

2. Inversore di Peaucellier

L'inversore di Peaucellier è un sistema articolato di 6 sbarre (fig.4)



(5)

$$OA = OA^*$$

$$AB = AC = A'B = A'C.$$

con

(6)

$$OA > AB.$$

figura 4

Indichiamo con M il punto medio del segmento BC .

Osservazione 4. Il triangolo ABC è isoscele e uguale (III criterio) ad A^*BC . La mediana AM è anche altezza relativa al lato BC e quindi OMA è rettangolo in M , così come ABM .

Poniamo

$$(7) \quad \begin{aligned} OA &= a; & AB &= AC = b; \\ AM &= v; & OM &= m; & BM &= CM = u \end{aligned}$$

Si dimostra facilmente che i punti O, B, C sono allineati. Per la posizioni fatte in (7) si ha

$$(8) \quad OB = m - u; \quad OC = m + u$$

$$(9) \quad OB \cdot OC = m^2 - u^2.$$

Per il teorema di Pitagora applicato al triangolo OMA

$$(10) \quad m^2 = a^2 - v^2.$$

Per il teorema di Pitagora applicato al triangolo BMA

$$(11) \quad b^2 = u^2 + v^2.$$

Sostituendo il (9) per le (10) e (11)

$$(12) \quad OB \cdot OC = a^2 - b^2.$$

Osservazione 5. Deformando il quadrilatero AA^*BC la (12) vale sempre. Quindi, tenuto fisso il punto O , il sistema articolato realizza una corrispondenza tra B e C che è una inversione circolare di polo O .

Osservazione 6. Per ovvie ragioni di limitazione materiale, il punto C non può descrivere un'intera retta e quindi B non può descrivere tutta la circonferenza per O . Quindi si può solo dire che, quando C descrive un segmento rettilineo, B descrive un arco di una circonferenza passante per O .

II - TEORIA DEL TRISETTORE DI KEMPE

1. Antiparallelogrammo intrecciato articolato.

Sono date 4 aste

$$(1) \quad \begin{cases} AB = OC \\ OA = BC \end{cases}$$

Scegliamo

$$(2) \quad AB > OA$$

e poniamo

$$(3) \quad \frac{AB}{OA} = k > 1$$

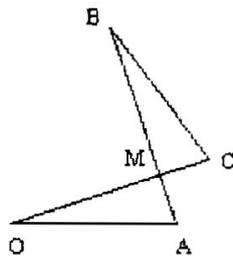


figura 1

Sul poligono intrecciato $OABC$ si dimostrano le seguenti relazioni (III criterio)

$$(4) \quad \begin{cases} \widehat{OAB} = \widehat{OCB} \\ \widehat{AOC} = \widehat{ABC} \end{cases}$$

Si ha anche (II criterio)

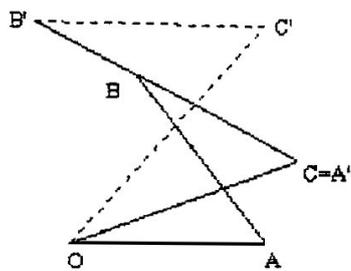
$$(5) \quad \begin{cases} MA = MC \\ MC = MO \end{cases}$$

Osservazione 1. Immaginiamo di fissare i due punti O, A il sistema articolato ha un grado di libertà: cioè la posizione di uno dei tre lati OC, AB oppure BC determina univocamente quella degli altri elementi. Oppure la posizione dei 3 elementi mobili è univocamente determinato dalla misura di uno degli angoli.

2. Costruzione del trisettole

Dato l'antiparallelogramma $OABC$ della figura 1, se ne può costruire un secondo $OA'B'C'$ assumendo

$$(6) \quad \begin{cases} OA' \equiv OC \\ A'B' = k \cdot CB \end{cases}$$



Osservazione 2. L'antiparallelogrammo $OA'B'C'$ è simile all'antiparallelogramma $OABC$: infatti l'angolo $O\hat{A}'B' = OCB$ per costruzione ed inoltre, per le (6),

$$(7) \quad \frac{A'B'}{OA'} = \frac{OC}{OA}.$$

Quindi si ha

$$(8) \quad A\hat{O}C = A'\hat{O}C'.$$

figura 2

La costruzione può essere ripetuta con un terzo antiparallelogramma $OA''B''C''$, avendo quindi un terzo angolo

$$(9) \quad A''\hat{O}C'' = A'\hat{O}C' = A\hat{O}C$$

e quindi si ha

$$(10) \quad A\hat{O}C'' = 3 \cdot A\hat{O}C; \quad A\hat{O}C = \frac{1}{3} A\hat{O}C''$$

Osservazione 3. L'operazione può essere ripetuta ottenendo un multiplo qualunque dell'angolo AOC .

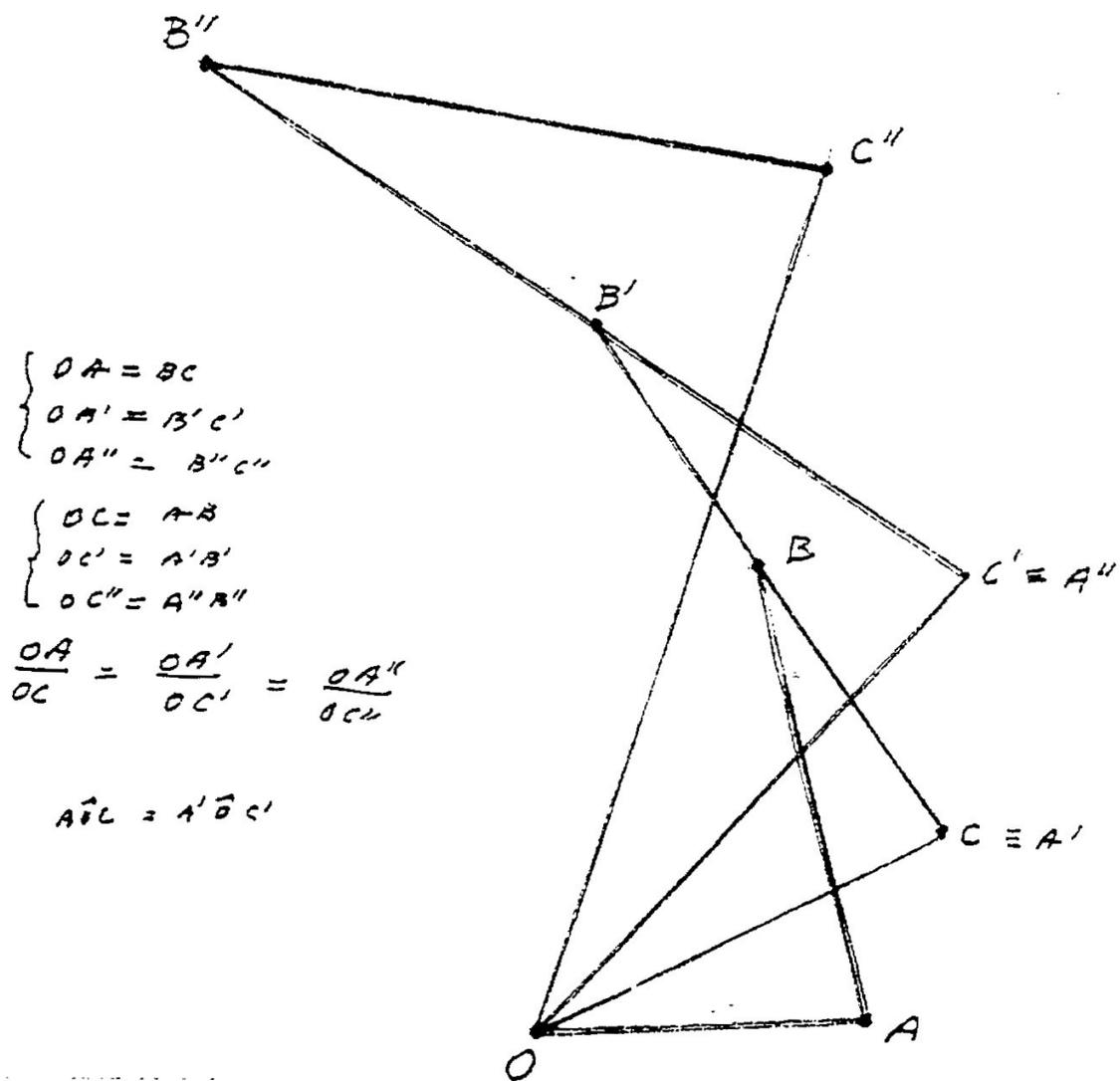


tavola I

III - OSSERVAZIONI SULLA TRISEZIONE DELL'ANGOLO

1. Il problema classico della trisezione

Si chiama tradizionalmente problema di trisezione quello che può essere enunciato nel modo seguente: dato un angolo α minore di un angolo retto, costruire un angolo β tale che si abbia

$$(1) \quad \beta = \frac{1}{3} \alpha$$

o meglio

$$(2) \quad 3\beta = \alpha.$$

Nel modo abituale di esprimersi della Geometria classica, si suole sottintendere che la costruzione di un angolo β , dato che sia α , sia ottenuta con gli strumenti classici di Euclide: riga (non graduata) e compasso impiegati con le seguenti regole:

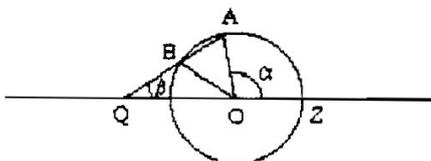
- la riga deve essere impiegata solo per congiungere due punti con una retta o per determinare il punto di intersezione di una data retta con un'altra (costruita con la modalità precedente) oppure per determinare le intersezioni di una retta con una circonferenza data.
- Il compasso può essere impiegato solo per tracciare una circonferenza che abbia un dato centro e un dato raggio (e quindi determinare l'intersezione della circonferenza suddetta con una data retta, oppure con una data circonferenza).

La riga (non graduata) ed il compasso vengono chiamati strumenti elementari; e quando essi sono impiegati secondo le modalità a), b) di cui sopra, si suol dire che si fanno costruzioni elementari (di elementi geometrici).

Per esempio non è una costruzione elementare quella che si potrebbe immaginare per costruire per tentativi il punto di contatto T per una data circonferenza ed una retta passante per un punto Q (che è ovviamente fuori dalla circonferenza).

Neppure è una costruzione elementare (nel senso sopra spiegato) quella che conduce alla trisezione di un angolo α con la procedura seguente:

dato un angolo



$$(3) \quad \alpha = \widehat{ZOA}$$

si traccia una circonferenza di raggio r qualunque con centro in O , e siano A e Z due suoi punti. Poi, preso un segmento di lunghezza r , si cerca per tentativi di portare il segmento stesso in una posizione tale che uno dei suoi estremi Q appartenga alla retta OZ , e l'altro suo estremo B appartenga alla circonferenza, in modo tale che il prolungamento del

figura 1

segmento passi per il punto A . Infatti i due triangoli QOB e BOA sono isosceli per

costruzione. Quindi si ha:

$$(4) \quad \begin{aligned} \widehat{B\hat{O}Q} &= \widehat{B\hat{O}O} = \beta \\ \widehat{Q\hat{B}O} &= 180^\circ - 2\beta \end{aligned}$$

$$(5) \quad \begin{aligned} \widehat{O\hat{B}A} &= \widehat{B\hat{A}O} = 2\beta \\ \widehat{B\hat{O}A} &= 180^\circ - 2\beta - 2\beta = 180^\circ - 4\beta \end{aligned}$$

ma si ha

$$(6) \quad \begin{aligned} \widehat{Q\hat{O}B} + \widehat{B\hat{O}A} + \widehat{A\hat{O}Z} &= 180^\circ \\ \beta + 180^\circ - 4\beta - \alpha &= 180^\circ \end{aligned}$$

ossia

$$(7) \quad \alpha = 3\beta$$

Osservazione 4. Sono stati realizzati dei dispositivi materiali (che non sono sistemi articolati di sbarre incernierate) che realizzano la figura precedente. Il numero dei dispositivi materiali escogitati per risolvere il problema della trisezione dell'angolo è molto grande.

2. Aspetto geometrico del problema

Dal punto di vista algebrico il problema della trisezione dell'angolo si traduce nell'equazione

$$(8) \quad 4\cos^3\beta - 3\cos\beta = \cos\alpha$$

che potrebbe essere chiamata "formula di trisezione", la quale traduce algebricamente la relazione (7) per la funzione "coseno".

Consideriamo $\cos\alpha$ come un dato, h , ovviamente con

$$(9) \quad |h| \leq 1$$

e poniamo

$$(10) \quad \cos\beta = x$$

Dalla (8) si ottiene allora l'equazione cubica

$$(11) \quad 4x^3 - 3x - h = 0$$

Consideriamo x ed h come misure di segmenti, rispetto ad un segmento unitario u fissato. Sussiste il

Teorema Il segmento avente una misura x , radice dell'equazione (11), può essere costruito con operazioni elementari a partire dai segmenti di misura 1 e h , se e soltanto se la radice x della (11) può essere espressa come funzione algebrica di h con l'impiego soltanto dell'operazione di radice quadrata.

Si verifica che esistono infiniti valori di h per i quali ciò non è possibile. Uno di questi per esempio è $h = 1/2$, che corrisponde al valore $\alpha=60^\circ$; ne consegue che l'angolo $\beta=20^\circ$ non può essere costruito con costruzioni elementari.

Osservazione 5. Esistono tuttavia anche infiniti angoli che possono essere trisecati con operazioni elementari.

3. Sulla soluzione dei problemi matematici (in particolare geometrici)

Da quanto precede si deduce facilmente che quando si enuncia un problema matematico (in particolare geometrico) occorre precisare quali mezzi o strumenti sono ammessi per la soluzione.

In generale si potrebbe dire che la soluzione di un problema è determinata implicitamente dal suo enunciato e dai dati.

Allora risolvere un problema significa rendere esplicite le informazioni contenute implicitamente nell'enunciato (ben inteso quando questo sia ben fatto).

Più in generale si può dire che risolvere un problema significa trovare razionalmente più informazioni di quelle date implicitamente con l'enunciato del problema stesso.

Un esempio semplice è fornito dal caso delle cosiddette formule risolutive delle equazioni: per esempio tutti sanno che, data l'equazione algebrica di II grado

$$(12) \quad ax^2 + bx + c = 0$$

si ha

$$(13) \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Le (12) (13) sono equivalenti, ma la (13) rende esplicite le operazioni da eseguire per ottenere quei valori della x che sono implicitamente determinati dalla (12) in modo univoco.

Osservazione 6. La (13) non fa che rimandare il problema della determinazione della x al calcolo di operazioni razionali (somme, moltiplicazioni, divisioni) ed alla operazione

$$(14) \quad \sqrt{b^2 - 4ac}$$

che conduce alla soluzione di un'equazione di II grado analoga alla (12).

Ma i risultati della (14) si sanno determinare con procedure ormai standardizzate e memorizzate, oppure sono addirittura contenute in tabelle stampate da secoli.

Ma non è escluso che in alcuni casi si possano ottenere informazioni più facilmente che con la (13), informazioni che talvolta risultano anche più accurate di quelle fornite dalla (12).

A titolo di esempio consideriamo la ricerca di valori approssimati di quel numero irrazionale che misura il segmento chiamato "parte aurea" di un segmento dato, o anche "sezione aurea" del segmento stesso. Il problema della sezione aurea di un segmento viene spesso presentato in termini tradizionali come il problema di "dividere il segmento in media ed estrema ragione".

Euclide [ELEMENTI Libro IV, Proposizione 10] utilizza la costruzione geometrica del segmento stesso per risolvere il problema della iscrizione del decagono regolare nella circonferenza. In termini algebrici, scelto il segmento dato come unità di misura delle lunghezze, ed indicata con x la lunghezza della sua sezione aurea, dalla definizione di questa si giunge alla proporzione:

$$(15) \quad 1:x = x:(1-x)$$

e di qui facilmente alla equazione quadratica:

$$(16) \quad x^2 + x - 1 = 0.$$

La formula (13) conduce in questo caso alla espressione della radice positiva della (16) nella forma:

$$(17) \quad x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

Si vuol dire che il simbolo " $\sqrt{5}$ " rappresenta un "numero irrazionale"; ciò significa che:

- a) non è possibile rappresentare l'ente simbolizzato con un'unica frazione;
- b) si possono costruire degli algoritmi infiniti che determinano una coppia di successioni convergenti di numeri razionali;

per esempio si suole insegnare e far memorizzare la procedura che viene chiamata di "estrazione di radice quadrata"; nel caso in esame per esempio l'applicazione di tale procedura conduce a scrivere:

$$(18) \quad \sqrt{5} = 2,236067\dots$$

e quindi dalla (17):

$$(19) \quad x = 0,618033\dots$$

E' noto che i puntini che figurano nelle (18) e (19) stanno ad indicare convenzionalmente che i simboli scritti realizzano le condizioni a) e b) enunciate poco sopra. In particolare il simbolo (19) indica che si può costruire una coppia di successioni infinite di numeri razionali, i cui

primi elementi sono:

$$(20) \quad 1; \quad 0,7; \quad 0,62; \quad 0,619; \quad 0,6181; \quad \dots$$

$$(21) \quad 0; \quad 0,6; \quad 0,61; \quad 0,618; \quad 0,6180; \quad \dots$$

Secondo l'abitudine, i numeri (20) e (21) vengono scritti in forma decimale; inoltre i numeri (20) vengono chiamati "valori approssimati per eccesso" ed i numeri (21) "valori approssimati per difetto" del numero irrazionale $\sqrt{5}$.

Si osserva tuttavia che la procedura ora ricordata, e che viene abitualmente insegnata, non è la sola che conduce a costruire una coppia di successioni convergenti, che definiscono un numero considerato come soluzione della (16). Questa infatti può essere scritta nella forma:

$$(22) \quad x = \frac{1}{x+1}$$

e di qui si può partire per costruire due successioni di numeri razionali con un procedimento che viene detto "iterazione" nel modo seguente: posto per un momento

$$(23) \quad y = f(x) = \frac{1}{x+1},$$

si sceglie un valore approssimato di x , si calcola il corrispondente valore y mediante la (23) e si reintroduce tale valore nella $f(x)$; per esempio prendendo inizialmente $x = 1$ si ottiene la successione:

$$(24) \quad \begin{array}{cccccccc} & 1 & & 2/3 & & 5/8 & & 13/21 & & \dots \\ & \searrow & & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & & \searrow & & \nearrow \\ & & 1/2 & & 3/5 & & 8/13 & & 21/34 & & \end{array}$$

Dal modo in cui la successione è costruita si verifica che i numeratori e i denominatori delle frazioni della successione sono i numeri della nota "successione di Fibonacci" [Leonardo Pisano detto il Fibonacci 1170-1250], nella quale ogni elemento è uguale alla somma dei due che lo precedono; i primi 15 numeri di tale successione sono dunque:

$$(25) \quad 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, \dots$$

e il rapporto di ogni numero al successivo fornisce un elemento della successione (24). Inoltre nella (24) è messa in evidenza la proprietà che i numeri della prima riga vanno decrescendo e sono maggiori di quelli della seconda, i quali vanno crescendo; in modo tale che la differenza tra un numero della prima riga ed uno della seconda tende a zero.

NdR

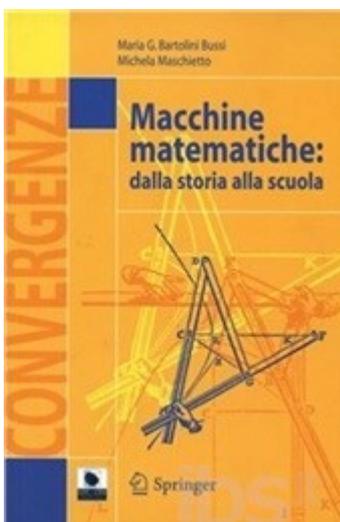
File reimpaginati aprile 2015

(*) Ricordiamo almeno Il giardino di Archimede – Un museo per la matematica

<http://web.math.unifi.it/archimede/>

Un riferimento prezioso per l'argomento è il sito

<http://www.mmlab.unimore.it/site/home.html>



Le macchine matematiche sono tra gli strumenti suggeriti per l'attività di laboratorio, nella proposta di nuovi curricula avanzata dall'Unione Matematica Italiana. Una ampia collezione di macchine (oltre 200), di interesse storico e didattico, è stata ricostruita a Modena, dove è collocato, presso il Dipartimento di Matematica, un laboratorio di ricerca per la didattica della geometria con l'uso di strumenti (il Laboratorio delle Macchine Matematiche). L'esplorazione guidata delle macchine consente di ricostruire il significato geometrico-spaziale di concetti o procedure di solito affrontati solo nel quadro algebrico e di esplorare dinamicamente le configurazioni assunte allo scopo di produrre congetture e costruire dimostrazioni.